نظرية الأعداد Number Theory

الحلول

قابلية القسمة

(A) إذا كان x, y عددين صحيحين فاثبت أن $17 \mid 2x+3y \Leftrightarrow 17 \mid 9x+5y$.

الحل

" $\Rightarrow$ "

$$17 \mid 2x+3y \Rightarrow 17 \mid 13(2x+3y) = (17x+34y)+(9x+5y)$$
$$\Rightarrow 17 \mid 9x+5y$$

" $\Leftarrow$ "

$$17 \mid 9x+5y \Rightarrow 17 \mid 4(9x+5y) = (34x+17y)+(2x+3y)$$
$$\Rightarrow 17 \mid 2x+3y$$

(B) اثبت أن $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ يقبل القسمة على 9.

الحل

ضع $S = n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$.

$$\begin{aligned}
S &= n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 \\
&= n^3+(n^3+3n^2+3n+1)+(n^3+6n^2+12n+8) \\
&= 3n^3+9n^2+15n+9 = 3n^3+15n+9(n^2+1) \\
&= 3n^3-3n+18n+9(n^2+1) \\
&= 3n(n^2-1)+9(n^2+2n+1)
\end{aligned}$$

واضح أن كل من حدي المعادلة الأخيرة يقبل القسمة على 9 ، الحد الأول يتكون من العدد 3 مضروبا في ثلاثة أعداد صحيحة متتالية والثاني وضوحا يقبل القسمة على 9 .

(C) ليكن n عدد صحيح موجب، لماذا $n^5 - n$ يقبل القسمة على 5 دائما؟

الحل

ضع $S = n^5 - n$.

$$S = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$$

أي عدد صحيح موجب n يكون على الصورة $n = 5k + i, \quad 0 \le i \le 4$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذا كان n يساوي $5k$ أو $5k+1$ أو $n = 5k+4$ فان $5|S$. أمـــا إذا كـــان $n = 5k+2$ او $n = 5k+3$ فان $5|S$ وذلك لان $5|n^2+1$. أكثر من ذلك يمكن إثبات أن $30|S$ وإذا كان n عدد فردي فان $240|S$.

(D) أوجد جميع الأزواج الصحيحة الموجبة (m,n) التي تحقق المعادلة $m^2 - n! = 780$.

الحل

إذا كان هناك حل فان $n \le 5$ لأنه إذا كان $n > 5$ فان $3|780 + n!$ و $9 \nmid 780 + n! = m^2$ وبالتعويض بـــ $n = 1,2,3,4,5$ نجد أن $n = 5$ و $m = 30$ هو الحل الوحيد.

(E) إذا كان $a,b \in \mathbb{Z}$ فأثبت أن $4 \mid a^2 - b^2$ إذا وإذا فقط كان a,b كلاهما زوجيان أو فرديان.

الحل

افرض أن احدهما وليكن a فردي و b زوجي عندئذ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ عبارة عن حاصل ضرب فرديين وبالتالي $4 \nmid a^2 - b^2$. الآن افرض أن كلاهما فرديان أو كلاهما زوجيان إذا $a+b, a-b$ زوجيان وبالتالي $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ يقبل القسمة على 4.

(F) هل توجد كثيرة حدود $p(x)$ معاملاتها أعداد صحيحة بحيث $p(1) = 2$ و $p(3) = 5$ ؟

الحل

بفرض توجد كثيرة حدود $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث $a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0,1,\cdots,n$ و $p(3) = 5 \quad p(1) = 2$.

$$p(1) = 2 \Rightarrow a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 2$$

$$p(3) = 5 \Rightarrow 3^n a_n + 3^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 3a_1 + a_0 = 5$$

بالطرح، نحصل على

$(3^n - 1)a_n + (3^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (3-1)a_{10} = 3$ ، تناقض، 2 تقسم الطرف الأيسر لان: $2 \mid 3^i - 1$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$ بينما 2 لا قسم 3 (الطرف الأيمن).إذاً لا توجد مثل هذه كثيرة الحدود. لاحظ أن $a - b \mid p(a) - p(b)$ لكل $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \neq b$.

(G) أثبت أنه لكل $n > 11$ فان العدد $n^2 - 19n + 89$ ليس مربعا

الحل

سوف نثبت أن العدد $n^2 - 19n + 89$ يقع بين عددين مربعين متتاليين لكل $n > 11$.

$$n^2 - 19n + 89 = n^2 - 18n + 81 - (n-8) = (n-9)^2 - (\underbrace{n-8}_{>0}) < (n-9)^2$$

$$n^2 - 19n + 89 = n^2 - 20n + 100 + n - 11 = (n-10)^2 + \underbrace{n-11}_{>0} > (n-10)^2$$

أي أن $(n-10)^2 < n^2 - 19n + 89 < (n-9)^2$.

(H) إذا كان n مكعب كامل فأثبت أن n^2+3n+3 ليس مكعب كامل.

الحل

بفرض العكس أن n^2+3n+3 عدد مكعب كامل وحيث أن n مكعب كامل ، إذاً $n(n^2+3n+3)$ مكعب كامل، ولكن

$$n(n^2+3n+3)=n^3+3n^2+3n=(n+1)^3-1$$

وهذا تعارض لان $(n+1)^3-1$ لا يمكن أن يكون عدد مكعب كامل.

(I)ليكن $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ، أثبت أن $6\,|\,a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow 6\,|\,a+b+c$.

الحل

لاحظ أن $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)=6k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. وينتج المطلوب مباشرة.

(J)أثبت أن العدد $\underbrace{11\cdots1}_{2011}\underbrace{55\cdots5}_{2010}6$ عدد مربع

الحل

ليكن $N=\underbrace{11\cdots1}_{2010}\underbrace{55\cdots5}_{2009}6$

$$\begin{aligned}N&=\underbrace{11\cdots1}_{2011}\times10^{2011}+\underbrace{55\cdots5}_{2010}\times10+6\\&=\frac{1}{9}(10^{2011}-1)\times10^{2011}+\frac{5}{9}(10^{2010}-1)\times10+6\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9}[(10^{4022} - 10^{2011} + 5 \times 10^{2011} + 4]$$
$$= \frac{1}{9}[(10^{4022} + 4 \times 10^{2011} + 4]$$
$$= (\frac{10^{2011} + 2}{3})^2 = (\frac{1\underbrace{00\cdots0}_{2010}2}{3})^2 = (\underbrace{33\cdots3}_{2010}2)^2$$

القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

(A) ليكن $m, n \in \mathbb{Z}$. أوجد $\gcd(2^n, 2m+1)$، $\gcd(6, 2m+1)$ ، $\gcd(2n+2, 2n+6)$، $\gcd(2^n - 1, 2^n + 1)$

الحل

$\gcd(2^n, 2m+1) = 1$ و $\gcd(6, 2m+1) | 3$ و

$$\gcd(2n+2, 2n+6) = \gcd(2n+2, 2n+6-2n-2) = \gcd(2n+2, 4) = 2 \ or \ 4$$
$$\gcd(2^n - 1, 2^n + 1) = \gcd(2^n - 1, 2^n + 1 - 2^n + 1) = \gcd(2^n - 1, 2) = 1.$$

(B) أثبت أن الكسر $\frac{21n+4}{14n+3}$ في أبسط صورة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ $(IMO\ 1959)$.

الحل

المطلوب إثبات أن $\gcd(21n+4, 14n+3) = 1$.

بما أن $(21n+4)(-2) + (14n+3) \times 3 = 1$ إذا $\gcd(21n+4, 14n+3) = 1$.

(C) إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فاثبت أن $\gcd(a+b, a^2 - ab + b^2) | 3$.

الحل

بفرض $d = \gcd(a+b, a^2 - ab + b^2)$،

$$d \mid (a+b)^2 - a^2 + ab - b^2 = 3ab$$

أيضا $d \mid 3b(a+b)$ ومنها $d \mid 3b^2$ وبالمثل $d \mid 3a^2$ وعليه $d \mid (3a^2, 3b^2) = 3(a^2, b^2) = 3$ من الخاصيتين (8) و (9) من خواص القاسم المشترك الأكبر.

(D) أثبت أن $\gcd(5a+3b, 13a+8b) = \gcd(a,b)$.

الحل

بفرض $d_1 = \gcd(a,b)$ و $d_2 = \gcd(5a+3b, 13a+8b)$.

بما أن

$$d_1 \mid a, \quad d_1 \mid b \Rightarrow d_1 \mid 5a+3b, \quad d_1 \mid 13a+8b \Rightarrow d_1 \mid d_2 \cdots (1)$$

أيضا

$$d_2 \mid 5a+3b, \quad d_2 \mid 13a+8b \Rightarrow d_2 \mid 8(5a+3b) - 3(13a+8b) = a,$$
$$d_2 \mid (-13)(5a+3b) + 5(13a+8b) = b$$
$$\Rightarrow d_2 \mid d_1 \cdots (2)$$

من (1) و (2) ينتج المطلوب.

(E) إذا كان $A = 2n+3m+13, \quad B = 3n+5m+1, \quad C = 6n+8n-1$

فاثبت أن $\gcd(A,B,C) \mid 77$.

الحل

ليكن $d = \gcd(A,B,C)$. إذا d كان هو القاسم المشترك الأكبر للأعداد A,B,C فإن d يقسم كل من

$$E = 3A - C = m + 40,$$
$$F = 2B - C = 2m + 3$$

وأيضا يقسم $G = 2E - F = 77$ ومن ثم d يجب أن يكون قاسما لـ 77.

(F) احسب $\gcd(n!+1,(n+1)!+1)$ حيث n عدد صحيح موجب.

الحل

$$\gcd(n!+1,(n+1)!+1) = \gcd(n!+1,(n+1)!+1-(n+1)(n+1))$$
$$= \gcd(n!+1,n) = 1$$

(G) ليكن n عدد صحيح أكبر من 2 ، أثبت انه يوجد ضمن الكسور $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$ عدد زوجي من الكسور غير القابلة للتحليل.

الحل

الفكرة في أن الكسر $\frac{k}{n}$ غير قابل للتحليل إذا وفقط إذا كان الكسر $\frac{n-k}{n}$ غير قابل للتحليل، وذلك لان $\gcd(k,n) = \gcd(n-k,n)$. إذا كان الكسرين $\frac{k}{n}$ و $\frac{n-k}{n}$ مختلفين لكل k فإن مجموع الكسور غير القابلة للتحليل زوجي.إذا كان $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$ لـ $k \in \mathbb{Z}^+$ فان $n = 2k$ وعليه $\frac{k}{n} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ كسر قابل للتحليل وتؤول هذه إلى الحالة الأولى.

(H) حاصل ضرب أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية لا يمكن أي يكون قوي لعدد صحيح موجب.

الحل

بفرض $n(n+1)(n+2)(n+3) = m^k$ حيث $n,m,k \in \mathbb{Z}^+$ و $k > 1$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = m^k$$

بمـــا أن $\gcd(n^2+3n, n^2+3n+2)=2$ ، إذن $\gcd(\frac{n^2+3n}{2}, \frac{n^2+3n+2}{2})=1$

وعليه $\frac{n^2+3n}{2}=a^k$ و $\frac{n^2+3n+2}{2}=b^k$ ومنها $b^k-a^k=1$ ولا يوجد عددين مـــوجبين الفرق بين قواهما يساوي 1.

ملاحظة إذا أضفنا لهذا الضرب العدد 1 فان العدد يصبح مربع كامل.

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= ((n^2+3n)+1)^2 \end{aligned}$$

(I) أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد

$2^{2^2}+2^{2^1}+1,\ 2^{2^3}+2^{2^2}+1, \ldots, 2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1, \ldots$.

الحل

اجعل $a_i=2^{2^i}+2^{2^{i-1}}+1$.

$$a_m=2^{2^m}+2^{2^{m-1}}+1=(2^{2^{m-1}}+1)^2-2^{2^{m-1}}=(2^{2^{m-1}}+1-2^{2^{m-2}})(2^{2^{m-1}}+1+2^{2^{m-2}})$$

إذا $a_m=(2^{2^{m-1}}+1-2^{2^{m-2}})a_{m-1}$ وبالتالي $a_{m-1}\mid a_m$. إذا القاسم المشترك الأكبر هو أول حد في المتتابعة وهو $a_2=21$.

(J) إذا كان $n,a,b\in\mathbb{Z}^+$ و $n>1$ فاثبت أن $\gcd(n^a-1,n^b-1)=n^{\gcd(a,b)}-1$

الحل

بدون فقد العمومية نفرض أن $a\geq b$. إذن

$$\gcd(n^a-1,n^b-1)=\gcd(n^a-1-n^{a-b}(n^b-1),n^b-1)=\gcd(n^{a-b}-1,n^b-1)$$

وبهذا نصل إلى المطلوب، تذكر أن $\gcd(a,b)=\gcd(a-b,b)$.

(K) رقم هاتفي، مكون من سبع خانات، إذا نقلت الخانات الأربع اليمنى إلى اليسار ونقلت الخانات الثلاث اليسرى إلى اليمين فإن الرقم الناتج أكبر من ضعف الرقم الأصلي بـــ 1. أوجد رقم الهاتف.

الحل

نفرض أن yx هو رقم الهاتف حيث x رقم مكون من أربع خانات و y رقم مكون من ثلاث خانات. من المعطيات $2(y\times 10000+x)+1=x\times 1000+y$ ومنها نجد أن $998x-19999y=1$.

الآن، نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 998 و 19999:

$$\begin{aligned}
19999 &= 20\times 998+39\\
998 &= 25\times 39+23\\
39 &= 1\times 23+16\\
23 &= 1\times 16+7\\
16 &= 2\times 7+2\\
7 &= 3\times 2+1\\
2 &= 2\times 1+0
\end{aligned}$$

وعليه $\gcd(998,19999)=1$ ، نستخدم خوارزمية إقليدس لإيجاد x,y ، بإجراء عملية عكسية لما تم أعلاه نجد أن $998\times 8717-19999\times 435=1$ وعليه يكون $x=8717,\quad y=435$

ويكون رقم الهاتف هو $435-8717$.ملاحظة هذا الرقم وحيد: لان جميع الحلول x,y تعطى من نتيجة 3 وتكون على الصورة

$$\begin{aligned}
x &= 8717-19999k\\
y &= 435-998k
\end{aligned}$$

حيث $k\in\mathbb{Z}$ ويكون كل من x,y موجبين إذا كان $k\le 0$ والحالة الوحيدة التي يكون فيه الرقم x يتكون من أربع خانات و y من ثلاث خانات هي عندما $k=0$.

الأعداد الأولية والنظرية الأساسية في الحساب

(A) إذا كان 2^n-1 عدد أولي فان n عدد أولي.

الحل

الإثبات بواسطة المكافئ العكسي. ليكن $n = mt$ عدد مؤلف حيث $1 < m,t < n$ ونجد أن

$2^n - 1 = 2^{mt} - 1 = (2^m)^t - 1 = (2^m - 1)k$ ومنـــــــــــــــها $2^m - 1 | 2^n - 1$ و $2^n - 1 > 1$ عدد مؤلف، لاحظ أن $k > 1$.

(B) إذا كان p العدد 27000001 له أربعة عوامل أولية فأوجد مجموعهم.

الحل

$$\begin{aligned}
27000001 &= 27 \times 10^6 + 1 \\
&= (3 \times 10^2)^3 + 1 \\
&= (300+1)(300^2 - 300 + 1) \\
&= 301(300^2 + 2 \times 300 + 1 - 3 \times 300) \\
&= 7 \times 43((300+1)^2 - 30^2) \\
&= 7 \times 43(301 - 30)(301 + 30) \\
&= 7 \times 43 \times 271 \times 331
\end{aligned}$$

ويمكن التحقق من أن كل من 271 و 331 عدد أولي. ويكون مجموعهم مساويا 652.

(C) هل $4^{2009} + 2009^4$ عدد أولي؟

الحل

بتطبيق متباينة صوفي جيرمين للمقدار $2009^4 + 4 \times (4^{502})^4$.

متطابقة صوفي جيرمين Sophie Germain :

$$\begin{aligned}
a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\
&= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\
&= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)
\end{aligned}$$

(D) أوجد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $2^{2m} - 3^{2n} = 175$

الحل

واضح أن $m > n$. فكرة الحل التحليل ومناقشة الحالات تبعا للنظرية الأساسية في الحساب

$$2^{2m} - 3^{2n} = (2^m - 3^n)(2^m + 3^n) = 7 \times 5^2 \quad .$$

لاحظ أن $(2^m - 3^n) < (2^m + 3^n)$ وعليه يكون لدينا الحالات:

$$(2^m - 3^n) = 1, \quad (2^m + 3^n) = 175 \cdots (1)$$

$$(2^m - 3^n) = 5, \quad (2^m + 3^n) = 35 \cdots (2)$$

$$(2^m - 3^n) = 7, \quad (2^m + 3^n) = 25 \cdots (3)$$

ونجد أن المعادلة (3) فقط التي لها حل هو $m = 4$ و $n = 2$.

(E) إذا كان p عدد أولي أكبر من 3 فإن العدد $p^2 + 2$ مؤلف و $24 | p^2 - 1$

الحل

أي عدد أولي أكبر من 3 يكون على الصورة $6k \pm 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$ وعليه يكون

$p^2 + 2 = 36k^2 \pm 12k + 3$ ، أي أن $3 | p^2 + 2$

وأيضا $p^2 - 1 = 12k(3k \pm 1)$ وحيث أن $k(3k \pm 1)$ عدد زوجي لجميع $k \in \mathbb{Z}^+$، إذن $24 | p^2 - 1$.

(F) أوجد جميع الأعداد الأولية p, q التي تجعل $p^2 + pq + q^2$ مربع كامل

الحل

بفرض $p^2 + pq + q^2 = n^2$ حيث n عدد صحيح موجب

$$p^2 + pq + q^2 = n^2 \Rightarrow (p+q)^2 - pq = n^2 \Rightarrow (p+q)^2 - n^2 = pq$$

$$\Rightarrow (p+q-n)((p+q+n) = pq$$

إذن $(p+q-n) = 1, \quad ((p+q+n) = pq$ لان $p+q-n \neq p, q$

ومنها $2p + 2q = pq + 1$ وعليه $pq - 2p - 2q + 4 = 3$

ومنها $(p-2)(q-2)=3$ ويكون $p=3$ و $q=5$ أو العكس.

(G) إذا كان للمعادلة $x^2-2px+p^2-5p-1=0$ جذرين صحيحين ، حيث p عـــدد أولي. أوجد القيم الممكنة للعدد p .

الحل

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2p \pm \sqrt{4p^2-4(p^2-5p-1)}}{2} \\ &= p \pm \sqrt{5p+1} \end{aligned}$$

لكي يكون للمعادلة جذرين صحيحين لابد أن يكون $5p+1$ مربع كامل. ليكن $5p+1=n^2$ حيث n عدد صحيح موجب. $5p=(n-1)(n+1)$ وعليه $n-1=5$ أو $n+1=5$ ونجـــد أن p يساوي 3 أو 7 .

(H) حلل العدد 1001001001 إلى عوامله الأولية.

الحل

$$\begin{aligned} 1001001001 &= 1001\times 10^6+1001 \\ &= 1001(10^6+1) \\ &= 7\times 11\times 13((10^2)^3+1) \\ &= 7\times 11\times 13\times 101\times 9901 \end{aligned}$$

(I) أوجد جميع الأعداد الأولية p بحيث العدد p^2+11 له 6 قواسم مختلفة من بينها العدد 1 والعدد نفسه

الحل

إذا كان p عدد أولي أكبر من 3 فإن $p=6k\pm 1, \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1$$
$$\Rightarrow p^2 + 11 = 36k^2 \pm 12k + 12$$
$$\Rightarrow 12 \mid p^2 + 11$$

وحيث أن $p^2 + 11 > 12$ و العدد 12 له 6 قواسم هي $1,2,3,4,6,12$. إذن $p^2 + 11$ له أكثر من 6 قواسم.

يتبقى حالتين هما $p = 2$ و $p = 3$:

إذا كان $p = 2$ فإن $p^2 + 11 = 15$ له أربعة قواسم فقط.

إذا كان $p = 3$ فإن $p^2 + 11 = 20$ له ستة قواسم بالضبط. إذاً $p = 3$ هو الحل الوحيد.

(J) إذا كان p,q أوليان وكان $r = \dfrac{p^2 + q^2}{p + q}$ عدد صحيح فأثبت أن r أولي.

الحل

إذا كان $p = q$ واضح أن $r = \dfrac{p^2 + q^2}{p + q} = \dfrac{p^2}{2p} = p$ وهو أولي. لنفرض الآن أن $p \neq q$ أن $r = \dfrac{p^2 + q^2}{p + q}$ عدد صحيح. بما أن $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq$ فإن $p + q \mid 2pq$ ولكن $(p + q, pq) = 1$ لأن $(p + q, p) = 1, (p + q, q) = 1$. إذا $p + q \mid 2$ وهذا مستحيل.

التطابقات قياس n

(A) أوجد آخر رقمين(خانتي الآحاد والعشرات) من العدد 7^{2010} .

الحل

بما أن $7^4 = 49^2 = (50 - 1)^2 \equiv 1 \pmod{100}$

إذا $7^{2010} = (7^4)^{502} \times 7^2 \equiv 1^{502} \times 49 \equiv 49 \pmod{100}$ **وعليه فإن آخر رقمين هما** 49

(B) أثبت أن $2222^{5555}+5555^{2222}$ يقبل القسمة على 7

الحل

$$2222 \equiv 3 (\bmod 7)$$
$$3^3 = 27 \equiv -1 (\bmod 7)$$
$$2222^{5555} \equiv 3^{5553+2} \equiv 3^{3k+2} \equiv (-1)^k \cdot 3^2 \equiv -9 \equiv -2 (\bmod 7)$$

لاحظ أن k عدد فردي. بالمثل

$$5555 \equiv 4 (\bmod 7)$$
$$3^3 = 27 \equiv -1 (\bmod 7)$$
$$5555^{2222} \equiv 4^{2220+2} \equiv 4^{3m+2} \equiv (-1)^m \cdot 4^2 \equiv 16 \equiv 2 (\bmod 7)$$

لاحظ m زوجي. بالجمع نصل للمطلوب.

(C) أوجد آخر رقمين من العدد $229^{10}+37^{10}$.

الحل

سنستخدم الخاصية: إذا كان $a \equiv b (\bmod n)$ فإن $a^n \equiv b^n (\bmod n^2)$.

$$229 \equiv 29 \equiv -1 \ (\bmod 10) \Rightarrow 229^{10} \equiv (-1)^{10} \equiv 1 \ (\bmod 100)$$
$$37 \equiv 7 \ (\bmod 10) \Rightarrow 37^{10} \equiv 7^{10} \equiv (50-1)^5 \equiv 250-1 \equiv 49 \ (\bmod 100)$$

إذا $229^{10}+37^{10} \equiv 1+49 \equiv 50 \ (\bmod 100)$ والباقي يكون 50.

(D) أوجد آخر رقمين من العدد 2^{999}.

الحل

لاحظ أولا أن: $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$ وعليه فان

$$2^{997} = (2^{10})^{99}.2^{7} \equiv (-1).3 \pmod{25} \equiv 22 \pmod{25}$$

ومنها نجد أن

$$2^{2}.2^{997} \equiv 4.22 \pmod{100} \equiv 88 \pmod{100}$$

لاحظ استخدمنا: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow am \equiv bm \pmod{mn}$ لكل $m \in \mathbb{Z}^{+}$.

حل آخر: $2^{12} \equiv -4 \pmod{100}$ ومنها $2^{72} = (2^{12})^{6} \equiv -4 \pmod{100}$ وأيضا $2^{432} = (2^{72})^{6} \equiv -4 \pmod{100}$ وعليه $2^{864} \equiv 16 \pmod{100}$.

أيضا $2^{60} \equiv -24 \pmod{100}$ ومن ثم $2^{999} \equiv 88 \pmod{100}$.

(E) إذا كان p عدداً أولياً و k عدد صحيح بحيث $1 \le k < p$ فأثبت أن $p \left| \binom{p}{k} \right.$.

الحل

بما أن $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ ، إذن $p | k\binom{p}{k}$ وحيث أن $\gcd(k,p) = 1$ أذن $p \left| \binom{p}{k} \right.$ ، الجزء الثاني ينتج مباشرة من نظرية ذات الحدين واستخدام الجزء الأول.

(F) حل المعادلة التالية في الأعداد الصحيحة $x^{2} + y^{2} = 3^{2008}$.

الحل

بما أن $x^{2} + y^{2} \equiv 3^{2008} \equiv 0 \pmod{3}$ وحيث أنه لأي عدد صحيح a فان $a^{2} \equiv 0 \ or \ 1 \pmod{3}$ وعليه $x^{2} + y^{2} \equiv 0 \pmod{3}$ إذا وإذا فقط $3 \mid x, y$. إذا افرض أن $x = 3x_1$ و $y = 3y_1$ وبالتعويض في المعادلة والقسمة على 3^{2} نستنتج أن . ${x_1}^{2} + {y_1}^{2} = 3^{2006}$.
بتكرار نفس الإجراء مرات متعاقبة يتولد متتابعة $(x_k)_{k=1}^{1004}$ وأخرى $(y_k)_{k=1}^{1004}$ بحيث $x = 3^{1004}x_{1004}$ و $y = 3^{1004}y_{1004}$ و ${x_{1004}}^{2} + {y_{1004}}^{2} = 1$ وهذه لها الحلول الأربعة $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

إذا المعادلة الأصلية لها الحلول $(\pm 3^{1004},0),\ (0,\pm 3^{1004})$.

(G) حدد الأعداد الصحيحة الموجبة m بحيث يكون $m!+5$ مكعب كامل.

الحل

دراسة هذه المسألة قياس 7 سيكون مناسب جدا، وهذه إستراتيجية مهمة.

بما أن $m \equiv 0,1,2,3,4,5,6 \pmod 7$ نريد أن نرى بواقي m^3 لذلك سنكتب بواقي القسمة على 7 بالشكل $m \equiv 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3 \pmod 7$ حتى يسهل حساب المكعبات.

بالتكعيب وفقا للخاصية $a^k \equiv b^k \pmod n$ نجد أن $m^3 \equiv 0,\pm 1 \pmod 7$. إذا باقي مكعب أي عدد لدى قسمته على 7 هو 0 أو ± 1. لذلك إذا كانت $m \geq 7$ فإن $m!+5$ ليس مكعب كامل لأن

$$m!+5 \equiv 0+5 \equiv 5 \pmod 7$$

يبقى فقط فحص $m!+5$ عندما $m<7$:

$$m=6,\ m!+5=5(6\cdot 4\cdot 3\cdot 2+1)=5\cdot 145=5^2\cdot 29$$
$$m=5,\ m!+5=5(4\cdot 3\cdot 2+1)=5\cdot 25=5^3$$

عندما $m=4,3,2,1$ فإن $m!+5=29,11,7,6$ على الترتيب. إذا $m!+5$ مكعب كامل فقط عندما $m=5$.

(H) أثبت أنه يوجد عدد غير منتهي من الأعداد الأولية التي على الصورة $4k+1$.

الحل

بفرض يوجد عدد منتهٍ من الأعداد الأولية التي على الصورة $4k+1$، هي $p_1<p_2<\ldots<p_t$. خذ العدد $N=(2p_1p_2\ldots p_t)^2+1$. بما أن $N>1$ عدد فردي، إذا يوجد له قاسم أولي $p>2$. أي أن $(2p_1p_2\ldots p_t)^2 \equiv -1 \pmod p$ وعليه p يجب أن يكون على الصورة $4n+1$ حيث $n\in\mathbb{Z}^+$ و بما أن $p_1,p_2,\ldots,p_t$ هي جميع الأعداد التي على الصورة $4k+1$ فإن $p=p_i$ حيث $1\leq i\leq t$ وبالتالي

$p|N$ و $p|(2p_1p_2...p_t)^2$ وعليه $p|N-(2p_1p_2...p_t)^2=1$ وهذا مستحيل. إذن عكس الفرض هو الصحيح.

(I) أثبت أن $2^{11\times 31}\equiv 2(\bmod 11\times 31)$

الحل: باستخدام الخاصية (8): $a\equiv b(\bmod n_1),\ \ a\equiv b(\bmod n_2)$ إذا وإذا فقط .

$a\equiv b(\bmod[n_1,n_2])$.

نستنتج أن

$2^{11\times 31}\equiv 2(\bmod 11\times 31)$ إذا وإذا فقط $2^{11\times 31}\equiv 2(\bmod 11)$ و $2^{11\times 31}\equiv 2(\bmod 31)$. بما أن $2^5\equiv 32\equiv -1\ (\bmod 11)$ فإن

$$2^{11\times 31}\equiv 2^{5(68)+1}\equiv(-1)^{68}\cdot 2^1\equiv 2\bmod 11$$

بالمثل حيث أن $2^5\equiv 1(\bmod 31)$ نستنتج أن $2^{11\times 31}\equiv 2(\bmod 31)$ ويثبت المطلوب.

(J) أوجد المربعات الكاملة في المتتابعة

$$1!,\ 1!+2!,\ 1!+2!+3!,1!+2!+3!+4!,\ \ldots,\ 1!+2!+3!+\cdots+n!,\ \ldots$$

الحل

بفرض $S_n=1!+2!+3!+\cdots+n!$

من خلال الحساب يتضح أن الحدود من S_1 إلى S_4 ليس بينها مربع كامل سوى S_1,S_3 .

الآن افرض $n\geq 5$. لدينا $S_n=(1!+2!+3!+4!)+5!+\cdots+n!=33+5!+\cdots+n!$

$S_n-3=30+5!+\cdots+n!$ كل حد من حدود $5!+\cdots+n!$ يقبل القسمة على 5 وعليه فإن S_n-3 يقبل القسمة على 5 . بمعنى آخر $S_n\equiv 3(\bmod 5)$. هذا التطابق قياس 5 مستحيل التحقق عندما يكون S_n مربع كامل وذلك لان لأي عدد طبيعي k فإن $k\equiv 0,\pm 1,\pm 2(\bmod 5)$ وعليه فإن $k^2\equiv 0,1,4(\bmod 5)$ إذا S_n ليس مربع كامل لكل $n\geq 5$.

(K) أوجد باقي قسمة $17+177+1777+\cdots+1\underbrace{77\cdots7}_{20}$ على 7 .

الحل

ضع $S=17+177+1777+\cdots+1\underbrace{77\cdots7}_{20}$.

$$S\equiv\sum_{k=1}^{20}10^k\pmod 7\equiv 3(3+2+6+4+5+1)+3+2\equiv 5\pmod 7$$