

intégrales généralisées

intégrabilité:

Convergence:

définition:

f : c.p.m. sur $[a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f \text{ cv si } \int_a^x f \text{ cv : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

théorème: test d'intégrale cv:

Pour $b \in [a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ cv} \Leftrightarrow \int_b^{+\infty} f(t) dt \text{ cv}$$

théorème:

si $\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ cv}$ alors, pour tout $x \geq a$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

$$\text{avec: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0$$

comparaison des fonctions positives:

f, g , c.p.m. tq: $0 \leq f \leq g$:

• si $\int_a^{+\infty} g \text{ cv}$: $\int_a^{+\infty} f$ aussi

• $\int_a^{+\infty} f \text{ div}$: $\int_a^{+\infty} g$ aussi

théorème:

si $f(t) \sim g(t)$ alors,

$\int f$ et $\int g$ sont de même nature au voisinage de t_0

diff:

f : intégrable sur $I = [a, +\infty[$ si $\int_a^{+\infty} |f| \text{ cv}$

on dit que $\int_a^{+\infty} f$ est absolument cv

théorème:

• si f intégrable sur $I \rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ cv}$

$$\text{et } \left| \int_a^{+\infty} f \right| \leq \int_a^{+\infty} |f|$$

Pour fonction quelconque:

• f : intégrable $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ cv}$ } quelconque.

* f positive: $f = |f|$

* f intégrable $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ cv}$ } positive

intg « semi cv »:

si $\int_a^{+\infty} f \text{ cv}$ et $\int_a^{+\infty} |f| \text{ div}$

on dit que $\int_a^{+\infty} f$ est semi-cv

* si f localement intégrable et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f = \alpha \neq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge

Intégrale de Riemann:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si } \underline{\alpha > 1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} \text{ CV pour } \underline{\beta > 1}$$

$$\int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha} \text{ CV } \alpha < 1$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ div } \forall \alpha$$

alors pour $0 < f < g$

$$\bullet \text{ si } \int_a^b g(t) dt \text{ CV} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ CV}$$

$$\bullet \text{ si } \int_a^b f(t) dt \text{ div} \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ div}$$

Intégrale de Bertrand:

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} \text{ CV si et seulement si}$$

$$(\alpha > 1) \quad (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

on peut pose par place de borne "2" la valeur "e"

Critère d'Abel:

f et g l'intégr. sur $[a, b[$ lq.

$$\bullet f \text{ est } \oplus \text{ et } \forall \text{ et } \lim_{t \rightarrow b^-} f(t) = 0$$

$\bullet b$ est un pt singulier de f, g ou $b = +\infty$

$$\bullet \exists M > 0, \forall (x, y) \in [a, b[\mid \int_y^x g(t) dt \mid \leq M$$

alors $\int_a^b f(t)g(t) dt$ et converge.

$$f: [a, b[\oplus : \lim_{x \rightarrow b^-} f = +\infty, \text{ on pose } g = \frac{1}{b-t}$$

$$\text{on calcule } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = K \in [0, +\infty]$$

\bullet si $K \in [0, +\infty]$ donc $\int_a^{b^-} f$ et $\int_a^{b^-} g$ de même nature

$$\bullet K = 0 \text{ et } \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^{b^-} f(t) dt \text{ converge}$$

$$\bullet K = +\infty \text{ et } \alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{b^-} f \text{ diverge}$$

$$f:]a, b] \oplus, \lim_{t \rightarrow a^+} f = +\infty \text{ (on pose } g = \frac{1}{(t-a)})$$

$$\text{on calcule } \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = K$$

\bullet si $K \in [0, +\infty]$, $\int_a^b f$ et $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\beta}$ de même nature

$$\bullet K = 0 \text{ et } \beta < 1 \Rightarrow \int_a^b f \text{ converge}$$

$$\bullet K = +\infty \text{ et } \beta > 1 \Rightarrow \int_a^b f \text{ div}$$

\bullet Pour intervalle $I =]a, b[$

on étudie l'intégrale de au voisinage "a" et "b"

$\bullet I = [a, b]$

on étudie $\int_a^b f$ au voisinage de b

$\bullet I =]a, b]$

on étudie $\int_a^b f$ au voisinage de a

\bullet si $c \in [a, b]$ pt singulier de f alors:

$$\text{on étudie } \int_a^c f \text{ et } \int_c^b f \text{ ; } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Théorème:

① Soit f localement intégrable positif sur $I = [a, b]$

avec $b = +\infty$, ou $f(b) = +\infty$ alors:

$$\bullet \int_a^b f(t) dt \text{ CV ssi } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ majorée sur } \mathbb{R}$$

② Si f et g l'intégr. \oplus sur I avec:

$a = -\infty$ ou $b = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow a^+} f = +\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow b^-} f = +\infty$

Critère de Riemann $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Pour $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si $\alpha < 1$

Pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si $\alpha > 1$

Règle " $n^a u_n$ " pour les séries num

* Soit $\sum u_n$ série de terme générale u_n de sign quelconque.

1) Si $\alpha > 1$ tq. $n^\alpha u_n \rightarrow L \neq 0$, $\sum u_n$ ACV

2) $\alpha \leq 1$ tq. $n^\alpha u_n \rightarrow L \neq 0$, $\sum u_n$ div

3) $\alpha > 1$ tq. $n^\alpha u_n \rightarrow 0$, $\sum u_n$ ACV

4) $\alpha \leq 1$ tq. $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$, $\sum u_n$ div

Regarder méthode d'ANALYS. P: 112

Règle de " $x^\alpha f(x)$ " pour la intégrale

Borne $b = +\infty$

Si $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L \neq 0$: $\int_a^{+\infty} f$ CV, si $\alpha > 1$

Si $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$: $\int_a^{+\infty} f$ CV, si $\alpha > 1$

Si $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$: $\int_a^{+\infty} f$ diverge si $\alpha \leq 1$

Borne b finie

$(b-x)^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} L \neq 0$: $\int_a^b f$ CV si $\alpha < 1$

$(b-x)^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$: $\int_a^b f$ CV si $\alpha < 1$

$(b-x)^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$: $\int_a^b f$ diverge si $\alpha \geq 1$

intégrale de Bertrand en " 0 "

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^p}$ converge si : $\alpha < 1$
en " 0 " : $\alpha = 1$ et $p > 1$

intégrale trigonométrique

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$
 \rightarrow DV, $\alpha \leq 0$
SCV, $0 < \alpha \leq 1$
ACV, $\alpha > 1$

$\sum f_n$: est une suite de fct.

$S_n = \sum_{k=0}^n f_k$: suite de somme partielle de la suite de fct.

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$: suite des restes de la suite de fct.

Convergence Simple :

* $\sum f_n$ CVS sur I, ssi, $\forall x \in I$ la suite num $\sum f_n(x)$ CV.

* $\sum f_n$ CVS ssi, $R_n(x) \xrightarrow{\text{CVS}} 0$

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f \Rightarrow f \xrightarrow{\text{CVS}} 0$

* $\sum f_n \text{ CVA} \Rightarrow \sum f_n \text{ CVS}$

Convergence Normale.

* s'il existe ϑ_n tq: $|f_n(x)| < \vartheta_n$, partout x, la suite numérique $\sum \vartheta_n$ CV alors

$\sum f_n$ CVN, car $\vartheta_n = \sup \{ |f_n(x)| \}$

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVN}} f \Rightarrow f \xrightarrow{\text{CVN}} 0$

* $\sum f_n \text{ CVN} \Rightarrow \sum f_n \text{ CVA} \Rightarrow \sum f_n \text{ CVS}$

Les Series de fonction

Convergence uniforme :

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} S$ ssi $S_n(x) \xrightarrow{\text{CVU}} S$.

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} S \Leftrightarrow R_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} \Rightarrow \sum f_n \xrightarrow{\text{CVS}}$

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$

* si $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} S$ alors $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVS}} S$.

* $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVN}} S \Rightarrow \sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} S$

Théorème d'Abel :

Soient f_n, g_n deux suites de fct. sur I tq:

a) $g_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$

b) $\sum u_n, \text{ CV}$, tq: $u_n = \sup \{ |g_n(x) - g_{n+1}(x)| \mid x \in I \}$

c) $\exists M > 0, \forall n, \sup \{ |\sum_{k=1}^n f_k(x)| \mid x \in I \} < M$

alors $\sum g_n f_n$ converge uniformément sur I

Critère de CVU pour la série alternée :

soit h_n suite de fct. positive définie sur I tq:

a) $h_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$ et b) $\forall x \in I, h_n(x)$ décroissante $(h_{n+1}(x) < h_n(x))$

alors $\sum (-1)^n h_n$ CVU, et nous avons,

$\forall x \in I, |R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k h_k(x)| < h_{n+1}(x)$

Convergence et la Continuité :

* f_n continue au $x_0 \in I$,

* et $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} F$

* alors $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue au pt $x_0 \in I$.

* f_n continue sur I, $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} F$

alors F continue dans I et:

Pour $a \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a) = F(a)$

* si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ sont continue sur I, $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVS}} F$

tq: F discontinue en un pt x_0 de I alors:

$\sum f_n$ n'est pas CVU sur I

La convergence et l'intégration :

* Soit f_n Riemann intégrable sur $I = [a, b]$ tq: $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVU}} F$

avec $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, alors F(x) est R. intégrable sur I:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

* si f_n sont R. I sur $I = [a, b]$, $\sum f_n \xrightarrow{\text{CVS}} F$

tq: F n'est pas Riemann intégrable sur I, car $\int_a^b F(x) dx \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

Dans: $\sum f_n$ n'est pas CVU sur $I = [a, b]$

La convergence et la dérivée :

Soit $\sum f_n$ définie sur $I \subset \mathbb{R}$ tq:

i) $\forall n, f_n$ est continuellement dérivable sur I

Soit $\sum f_n$ définie sur $I \subset \mathbb{R}$ tq :

i) $\forall n, f_n$ est continuellement dérivable sur I

ii) $\exists x_0 \in I$, tq $\sum f_n(x_0)$ est convergent

iii) $\sum f'_n \xrightarrow[I]{} G$

alors : $\sum f_n \xrightarrow[I]{} F$, F , dérivable sur I .

de plus :

$\forall x \in I$:

$$F'(x) = G(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

Série Numérique:

Définition

si $\sum_{k=0}^n u_k = S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S'$
 on dit que $\sum u_n$ est convergente vers S' .
 si $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \sum u_n$ CV.

Série télescopique:

$u_n = a_{n+1} - a_n$ et $a_n \rightarrow l$
 Alors $S' = l - a_0$

Critère de Comparaison:

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ de série à terme positif
 tel que $u_n \leq v_n$ Alors

- si $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- si $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

Critère des équivalents:

soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries
 à terme ≥ 0 tel que $u_n \sim v_n$

c-à-d: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Critère de négligence:

soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de séries à terme ≥ 0
 tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

- si $\sum v_n$ converge Alors $\sum u_n$ converge
- si $\sum u_n$ diverge Alors $\sum v_n$ diverge

Règle de $n^\alpha u_n$.

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0, \alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ CV

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \pm \infty, \alpha \leq 1 \Rightarrow \sum u_n$ DV.

Règle de Cauchy: (raisonnances)

$\sum u_n$ avec $u_n > 0$ supposons
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$

- si $a < 1$ Alors $\sum u_n$ CV
- si $a > 1$ " $\sum u_n$ DV
- si $a = 1$ " on ne peut rien conclure

Règle d'Alembert. (n!)

$\sum u_n$ avec $u_n > 0$

li $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a$

si $a < 1 \Rightarrow \sum u_n$ CV

si $a > 1 \Rightarrow \sum u_n$ DV

si $a = 1$ on ne peut rien conclure.

Comparaison d'une série à une intégrale

soit f une fonction positive et
 décroissante sur $(a, +\infty[$ et $u_n = f(n)$
 Alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\sum u_n$ sont
 de même nature.

Convergence Absolue.

si $\sum |u_n|$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ CV A.

tout $\sum A C$ Alors CV.

Critère spécial de \sum Alternée

soit $u_n = (-1)^n v_n$ avec v_n est une
 suite à terme positif.

si v_n est décroissante ($v_{n+1} < v_n$)

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Alors $\sum u_n$ est convergente.

Critère d'Abel

soient (v_n) et (w_n) deux suites telle
 que:
 i) suite (v_n) décroissante $\rightarrow 0$
 ii) $\exists M$ tq pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\sum_{k=0}^n w_k| \leq M$$

Alors $\sum v_n w_n$ est convergente.

Critère de Leibniz: pour série Alternée.

a- $\sum (-1)^n u_n$ CV si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$

b- si $S_n < S_{n+1} \Rightarrow S_n < S' < S_{n+1}$

et si $S_{n+1} < S_n \Rightarrow S_{n+1} < S' < S_n$

c- pour la mise: $|R_n| = |S' - S_n|$
 $|R_n| = |S' - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$

l'équivalence des fonctions:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ce qui signifie que $f(x) \sim_{x_0} g(x)$

$$\sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$$

$$\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$$

au voisinage de 0

$$\cos(x) \sim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x} \sim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x$$

$$(1+x)^a \sim_{x \rightarrow 0} 1 + ax$$

$$\frac{1}{1+x} \sim_{x \rightarrow 0} 1 - x$$

$$\frac{1}{1-x} \sim_{x \rightarrow 0} 1 + x$$

$$e^x \sim_{x \rightarrow 0} 1 + x$$

$$e^x - 1 \sim_0 x$$

$$\arcsin(x) \sim_0 x$$

$$(1+x)^a - 1 \sim_0 ax$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{ch}(x) \sim_{+\infty} \ln(x)$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{d} g(x) \sim_0 x$$

$$\operatorname{Sh}(x) \sim_0 x$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{Sh}(x) \sim_{+\infty} \ln(x)$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{th}(x) \sim_0 x$$

$$\operatorname{targ}(x) \sim_0 x$$

$$\ln(x) \sim_1 x - 1$$

$$\operatorname{th}(x) \sim_0 x$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{Sh}(x) \sim_0 x$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$$

triangle:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Limite des fonctions trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^2} = 0$$

Suites de fonctions:

Rappelle analyse 1:

Limites de suites géométriques:

(u_n) geom. suit; pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n = q^n$

① si $q < -1$ u_n n'a pas de limite

② si $-1 < q < 1$ donc la suite converge vers 0

③ $q = 1$ la suite converge vers 1 et est constante

④ $q > 1$ la suite diverge vers $+\infty$

théorème:

v_n et u_n deux suites tq:

$$s: v_n \leq u_n$$

Si v_n diverge vers $+\infty$ alors u_n aussi

Si u_n diverge vers $-\infty$ alors v_n aussi

théorème de sandwich ou d'encadrement:

$$s: v_n \leq u_n \leq w_n$$

Si v_n et w_n convergent vers même limite "l"

alors aussi u_n converge vers "l"

Convergence Simple:

On dit que la suite de fonction u_n converge simplement vers u , $I \rightarrow \mathbb{R}$ si:

$$\forall t \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t)$$

autre notation:

$$\forall t \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n(t) = \int(t)$$

exemple: soit $u_n(t) = t^n$ avec $t \in [0, 1]$

pour $t \in [0, 1]$

Quand $n \rightarrow +\infty$

limite de suite géométrique

$$\forall t \in [0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = 0$$

Cas 2: s: $t = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = 1$$

donc

$u_n(t)$ converge simplement sur une fonction:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 1, t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Exemple 2:

Soit $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$ sur \mathbb{R}

donc pour $n \rightarrow \infty$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x + \frac{1}{n}) = \sin(x)$

donc

$f_n(x)$ converge simplement à $f = \sin(x)$

Exemple 3:

Soit $f_n(x) = \frac{n e^{-x} + x^n}{n+x}$ sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n e^{-x} + x^n}{n+x} = \frac{n(e^{-x} + \frac{x^n}{n})}{n(1 + \frac{x}{n})} = e^{-x}$$

donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x}$$

On dit que

$f_n(x)$ converge simplement à une fonction

$$f(x) = e^{-x}$$

Théorème:

Si $f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} f$ et $f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} g$

alors $f = g$

Définition:

Si $f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} f$ alors

On dit que f est la limite simple

de la suite f_n et on note:

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

Propriété de la limite simple:

Si $u_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} u$ alors si chaque u_n est positive alors u est positive.

• $u_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} u$ si u_n croissant

alors u est croissant

Remarques:

① La limite simple d'une suite de fonctions (s'elle existe) elle est unique

② Si une suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers f ,

en général: $\int_a^b f(x) dx$ est différent

de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

③ Si $f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} f$ si f_n continue sur I n'est pas forcément f est continue sur I

④ $f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} f$ si f_n dérivable dans I n'est pas forcément dérivable sur I .

La convergence uniforme :

definition :

f_n converge uniformément sur I vers une fonction f si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{ |f_n - f|(x) : x \in I \} = 0$$

f : appelée limite uniforme de f_n

théorème 5 :

① si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ alors $f_n \xrightarrow{CVS} f$

mais la réciproque est fautive.

② si $f_n \xrightarrow{CVU} f$ et $g_n \xrightarrow{CVU} g$

alors $(\alpha f_n + \beta g_n) \xrightarrow{CVU} (\alpha f + \beta g)$

③ $f_n \xrightarrow{CVU} f$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n - f|(x) \leq u_n$$

avec $u_n \rightarrow 0$

④ si $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur I

si existe $x_n \in I$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f|(x_n) \neq 0$

alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur I

Remarque :

f_n est continue dans I sur x_0

$$f_n \xrightarrow{CVS} f$$

Si f n'est pas continue au point x_0

alors f_n ne converge pas uniformément sur I

théorème : Soit f_n suite de fonctions de I vers \mathbb{K} converge simplement vers f si il existe une suite réelle α_n tq :

$$\forall t \in I, |f_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n$$

$$\text{et } \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

alors f_n converge uniforme

La convergence et la continuité:

théorème: Soit f_n sur I de \mathbb{R} à \mathbb{R} .

(i) Les fonctions f_n sont continues au $x_0 \in I$

(ii) La suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f

alors:

f est continue au pt x_0 ; c.à.d.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] = f(x_0)$$

si f n'est pas continue dans un D

alors f_n ne converge pas uniformément vers f

Convergence et l'intégration:

théorème:

Si f_n est Riemann intégrable sur $[a, b]$ et f_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f

alors:

f aussi Riemann intégrable sur $[a, b]$

c.à.d.:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Ce résultat n'est plus valable avec la convergence simple.

Remarque:

Si f_n suite Riemann intégrable sur $[a, b]$ qui converge simplement vers f sur $[a, b]$

si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx$$

alors (f_n) ne converge pas uniformément sur $[a, b]$

La convergence et la dérivation:

Théorème:

Soit (f_n) une suite de fonctions sur I :

i) f_n continument dérivables sur I ($f_n \in C^1(I)$)

ii) f_n converge simplement sur I vers f

iii) la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g

alors:

$$\forall x \in I \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

Séries de Fourier:

Définition:

① on appelle série de Fourier ou (trigonométrique) tout série de fct^c $\sum f_n$ avec:

$$f_n = a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)$$

$$\text{et } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

② Soit f définie sur \mathbb{R} , T -périodique
La série de Fourier de " f " est la série de fct^c notée $(F(f))$

$$F(f) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

avec:

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx$$

Remarque:

① si f est ^{pair} paire alors:

$$a_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

$$a_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx$$

$$b_n(f) = 0$$

si f est impaire:

$$a_n = 0, b_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) dx$$

② si g 2π -périodique:

alors $F(g)$ est:

$$F(g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g) \cos(nx) + b_n(g) \sin(nx)$$

$2\pi = T$

avec:

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

et pour $n \geq 1$

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$$

* remarque que la fct^c
 $f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi} x\right)$ est 2π -périodique.

① Si la série numérique $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ converge normalement sur \mathbb{R} et dans ce cas nous avons:

$$f(x) = F(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Théorème (Dirichlet):

Soit f fct de C^1 par morceaux et T -périodique alors la s. de Fourier

$$F(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction f .

donc.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = F(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

Définition:

① "g" fct continue par morceaux sur \mathbb{R} si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = g_d(x_0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = g_g(x_0)$$

sont existents pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$

② Soit f une fct continue par morceaux sur \mathbb{R} , 2π -périodique on appelle régularisée de f la fct:

$$\tilde{f}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \frac{f_d(x) + f_g(x)}{2}$$

+ Remarquons qu'en tous points de continuité de f , nous avons:

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

Proposition: égalité de Parseval:

Soit une fct continue par morceaux sur \mathbb{R} et T -périodique alors:

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx$$

Remarque:

Si f continue par morceaux et T -périodique et paire:

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx$$

et f c. par morceaux, T -périodique et impair:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx$$

* si "g" C. par morceaux et 2π -périodique
alors:

$$|a_0(g)|^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx$$

Série de fonctions:

définitions:

f_n suite de fct^e sur $I \subset \mathbb{R}$

① la somme infinie $\sum f_n$ est appelée série de fonction définie sur I

② la suite de fonction S_n :

$$\forall x \in I \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

est appelée suite des fonction partielles de la série de $fct^e \sum f_n$.

③ la suite de $fct^e R_n(x)$

$$\forall x \in I \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

appelée Reste de la série de $fct^e \sum f_n$.

définition:

① $\sum f_n$ cvs sur I vers $fct^e S$ si et seulement si: $S_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} S$.

② on appelle ensemble de convergence de $\sum f_n$ l'ensemble des $x \in I$ tq: $\sum f_n(x)$ cv
c'est le domaine de définition de $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

Remarque:

* $\sum f_n$ cvs sur I si et seulement si:
 $\forall x \in I \quad \sum f_n(x)$ converge

* $\sum f_n$ cvs sur I si et seulement si:
 $R_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} 0$

* $\sum f_n$ cvs sur I alors:
 $f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} 0$

* $\sum f_n$ cv absolument sur I

alors:

elle converge simplement sur I
mais le réciproque est faux:

$$\text{si } \sum f_n \text{ cva} \Rightarrow \sum f_n \text{ cvs}$$

mais

$$\sum f_n \text{ cvs} \not\Rightarrow \sum f_n \text{ cva}$$

Convergence NORMALE:

définitions:

on dit que la série de $fct^e \sum f_n$ sur $I \subset \mathbb{R}$ si la série numérique

$$\text{determine } u_n = \sup \{ |f_n(x)| \}_{x \in I}$$

est converge

Propriété:

* Pour montrer que $\sum u_n$ cvn il suffit d'exhiber une suite $\alpha_n \in \mathbb{R}_+ \wedge \alpha_n \rightarrow 0$

* $\sum \alpha_n$ converge

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in A \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n$$

* si $\sum f_n$ cvn sur I alors:

$$f_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{cvs}} 0 \quad \text{mais le réciproque est faux}$$

si $\sum f_n$ cvn sur I alors:

donc elle converge absolument donc simplement sur I

mais le réciproque est faux

* $\sum u_n$ CVN au voisinage de $a \in A$
 s'il existe un voisinage V de a
 tel que la série de fct $\sum u_n$ CVN sur V

* $\sum u_n$ CVN au voisinage de
 tout point de A si elle converge
 normalement au voisinage de a
 pour tout $a \in A$

* $\sum u_n$ CVN sur tout segment
 s. $\sum u_n|_{[a,b]}$ CVN pour tout $[a,b]$
 inclus dans A .

convergence uniforme :

définition :

soit une série de fct $\sum f_n$ définie dans $I \subset \mathbb{R}$

$\sum f_n$ CVU sur I vers une fct S
 si et seulement si la suite de fct partielles
 S_n CVU sur I vers S

Remarque :

* $\sum f_n$ CVU sur I si et seulement si
 la suite R_n CVU sur I vers
 la fonction nulle

* si $\sum f_n$ CVU sur I alors :

$$f_n \xrightarrow{I} 0$$

* si $\sum f_n$ CVU sur I vers S
 alors : $\sum f_n$ CVS sur I vers S

* si $\sum f_n$ CVN sur I vers S
 alors $\sum f_n$ CVU sur I vers S

théorème d'Abel pour la CVU :

soient $f_n(x)$ et $g_n(x)$ deux suites de fct sur I tq :

a) $f_n(x) \xrightarrow{I} 0$

b) $\sum u_n = CV$ tq : $u_n = \sup \{ |g_n(x) - g_{n+1}(x)| \}$

c) $\exists M > 0, \forall n \sup \{ \sum_{k=1}^n |f_k(x)|, x \in I \} \leq M$

alors la série $\sum f_n$ converge
 uniformément sur I .

critère de convergence pour les séries alternées :

Proposition :

soit h_n une suite de fct positive définie sur I
 telle que :

a) $h_n \xrightarrow{I} 0$

b) pour $\forall x \in I$, $h_n(x)$ est décroissant
 (càd : $h_{n+1}(x) \leq h_n(x)$)

alors la série alternée $\sum (-1)^n h_n$
 converge uniformément sur I et

par conséquent :

$$\forall x \in I \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k h_k(x) \right| \leq h_{n+1}(x)$$

Point méthode:

Pour démontrer que $\sum f_n$ CVU, il est souvent pratique de démontrer que la série télescopique $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément

La convergence et la continuité:

Théorème:

Soit f_n une suite de fct^s sur $I \subset \mathbb{R}$ tq:
* les fct^s f_n sont continues au pt $x_0 \in I$

* la série de fct $\sum f_n$ CVU sur I
vers une fct F
alors la fct^e limite $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$
est continue au point x_0

Remarques:

① si f_n sont continues sur I et $\sum f_n$ CVU sur I vers F
alors:

F est continue sur I et dans ce cas:
pour $a \in I$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a) = F(a)$$

② si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n sont continue sur I
et $(\sum f_n)$ CVS sur I vers F
discontinue en un point $x_0 \in I$
alors la série $(\sum f_n)$ n'est pas convergente sur I

Intervention Somme limite:

Théorème:

Si $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de a adhérent à A ,
et si pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n
a une limite finie l_n en a alors

$\sum l_n$ converge et:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right)$$

La convergence et l'intégration:

Remarque 3

Soit f_n suite de fct^s Riemann intégrable sur $[a, b]$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fct^e F qui n'est pas Riemann intégrable sur $[a, b]$ car $\int_a^b F(t) dt \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n dt$

alors:

la série $(\sum f_n)$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[a, b]$

Théorème:

Soit f_n suite de fct^s Riemann intégrable sur $I = [a, b]$ telle que $\sum f_n$ CV uniformément sur l'intervalle I vers F ,

avec $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

alors:

$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est Riemann intégrable sur I
et on a:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Remarque: $x \in]-1, 1[$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

La convergence et la dérivée:

Théorème:

Soit $\sum f_n$ définie sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que:

(i) $\forall n, f_n$ est continuellement dérivable sur I

(ii) $\exists x_0 \in I$, telle que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I vers une fonction G

alors:

$\sum f_n$ CV uniformément sur I vers une

fonction F dérivable sur I de plus

$$\forall x \in I, F'(x) = G(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Théorème (dérivation à terme)

Soit la $\sum f_n$ de classe C^p , $p \geq 1$ sur:

• pour tout $K \in [0, p-1]$, $\sum u_n^{(K)}$ CV S

• $\sum u_n^{(p)}$ CVN sur tout segment de I .

alors: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^p

et pour tout $K \in [0, p]$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^{(K)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(K)}$$

autrement dit:

Théorème:

Si $u_n \xrightarrow[\text{I}]{\text{CVU}} u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et si chaque u_n

tend vers une limite finie l_n en a alors la suite (l_n) CV et:

$$u(l) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$$

autrement dit:

$$\lim_{t \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow a} u_n(t)$$

Regrder:

Étude de l'exponentielle réelle

"MPDDL" "MP" P: 383

fonction Zêta.

"MPDDL" "MP" P: 384