

Examen : Probabilités et Statistiques

Conseils :

- Aucun document n'est permis. Les calculatrices non programmables sont autorisées
- Les deux parties de l'exercice 1 sont indépendantes ;
- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice n°1 : « Probabilités » 12 pts

Partie I : Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité des moteurs, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, l'autre de type électrique.

On prélève au hasard un moteur dans la production et on note les événements suivants :

M : « le moteur présente un défaut mécanique ».	A : « le moteur prélevé présente au moins un défaut ».
E : « le moteur présente un défaut électrique ».	C : « le moteur prélevé présente un seul défaut ».
B : « le moteur prélevé ne présente aucun des deux types de défaut ».	

Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants : $P(\mathbf{M}) = 0,08$, $P(\mathbf{E}) = 0,05$ et $P(\mathbf{M} \cap \mathbf{E}) = 0,02$.

- 1) Les événements **M** et **E** sont-ils indépendants ?
- 2) Calculer la probabilité de l'évènement **M** sachant que l'évènement **E** est réalisé.
- 3) Calculer la probabilité de l'évènement **A**.
- 4) Montrer que la probabilité de l'évènement **B** est de 0,872.
- 5) Déterminer la probabilité de l'évènement **C**.

Partie II : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

- 1) Démontrer que f est une densité de probabilité
- 2) Soit **X** une variable aléatoire de densité de probabilité f . Calculer la fonction de répartition de la VA **X**
- 3) Dédurre $P(X > 2)$

Exercice n°2 : « Statistiques » 8 pts

Une usine « **A** » produit un type de composant électronique. La durée de vie des composants d'un échantillon de 100 composants pris au hasard est consignée dans le tableau suivant.

Durée de vie (en heures)	1800	1900	2000	2100
Effectifs	10	39	31	20

- 1) Préciser la **population** statistique, le **caractère** étudié et sa **nature**.
- 2) Déterminer le tableau statistique avec x_i , n_i , f_i et F_i .
- 3) Dessiner le diagramme en bâtons des effectifs.
- 4) Calculer le Mode, la Médiane et la variance.
- 5) Soit la répartition de la durée de vie des 620 composants électroniques d'une usine « **B** » :

Durée de vie (en 10^2 heures)	[5, 6[[6, 7[[7, ? [[?, 9[[9, 10[
Nombre de composants électroniques	100	80	240	160	?
Centre de classe			7,25		

- Compléter le tableau.

التمرين الأول: الإحتمالات

الجزء الأول:

شركة تقوم بتصنيع محركات كهربائية. ومن أجل التحقق من مطابقة المحركات، يتم إجراء اختبارين: اختبار ميكانيكي، والآخر اختبار كهربائي.

نأخذ محركًا عشوائيًا من الإنتاج ونلاحظ الأحداث التالية:

M : « المحرك به عطل ميكانيكي »	A : « المحرك به عطل واحد على الأقل ».
E : « المحرك به عطل كهربائي »	C : « المحرك به عطل واحد فقط »
B : « المحرك لا يحتوي على أي نوع من الأعطال »	

قامت الشركة بدراسة إحصائية على الإنتاج وحصلت على النتائج التالية: $P(M) = 0,08$ ، $P(E) = 0,05$ و $P(M \cap E) = 0,02$.

- هل الحدثان **M** و **E** مستقلان؟
- احسب احتمال وقوع الحدث **M** مع العلم أن الحدث **E** قد وقع.
- احسب احتمال وقوع الحدث **A**.
- برهن بأن احتمال وقوع الحدث **B** هو 0,872.

الجزء الثاني:

ليكن f الدالة المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

- برهن بأن f هي دالة كثافة الاحتمال.
- لنفترض أن X متغير عشوائي له كثافة الاحتمال f . احسب دالة توزيع للمتغير العشوائي X .
- استنتج $P(X > 2)$.

التمرين الثاني: الإحصاء

ينتج المصنع «A» نوعًا من العناصر الإلكترونية. الجدول التالي يظهر العمر الافتراضي (مدة الصلاحية) لعينة عشوائية مكونة من 100 عنصر إلكتروني.

العمر الافتراضي (بالساعات)	2100	2000	1900	1800
Effectifs	20	31	39	10

- حدد المجتمع الإحصائي والصفة المدروسة وطبيعتها.
- أكتب الجدول الإحصائي مع تحديد F_i و f_i ، n_i ، x_i .
- أرسم Diagramme en bâtons des effectifs.
- أحسب La Variance و La Médiane و Le Mode.
- الجدول التالي يظهر توزيع مدة الصلاحية لـ 620 عنصر إلكتروني أنتجه المصنع **B**

العمر الافتراضي (ب 100 x الساعات)	[5, 6[[6, 7[[7, ? [[?, 9[[9, 10[
عدد العناصر الإلكترونية	100	80	240	160	?
مركز الفئدة			7,25		

- أكمل الجدول

Corrigé type de l'examen : Probabilités et Statistiques

Exercice n°1 : « Probabilités » (12 pts)

Partie I :

1) M et E sont indépendants si seulement si $P(M \cap E) = P(M) \times P(E)$

D'après l'énoncé, on a : $P(M) = 0,08$, $P(E) = 0,05$ et $P(M \cap E) = 0,02$

Ainsi, on remarque que $P(M) \times P(E) = 0,08 \times 0,05 = 4 \cdot 10^{-3} \neq 0,02$ (1)

On en conclut que les deux événements ne sont pas indépendants.

2) On cherche à déterminer $P(M/E)$. En utilisant la définition, on obtient :

$$P(M/E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0,02}{0,05} = 0,4 \quad (1)$$

3) A : « le moteur prélevé présente au moins un défaut » = A : « le moteur présente un défaut mécanique ou un défaut électrique » = MUE.

D'après la formule, $P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0,08 + 0,05 - 0,02 = 0,11$ (1)

4) B : « le moteur prélevé ne présente aucun des deux types de défaut » = $\overline{M \cup E}$

Ainsi $P(B) = P(\overline{M \cup E}) = 1 - P(M \cup E) = 1 - 0,11 = 0,89$ (1)

5) Notons C_1 : « le moteur présente que le défaut mécanique »

$$P(C_1) = P(M \cap \bar{E}) = P(M) - P(M \cap E) = 0,08 - 0,02 = 0,06$$

De même, C_2 : « le moteur présente que le défaut électrique »

$$P(C_2) = P(E \cap \bar{M}) = P(E) - P(M \cap E) = 0,05 - 0,02 = 0,03 \quad (2)$$

On en déduit $P(C) = P(C_1) + P(C_2) = 0,06 + 0,03 = 0,09$

Partie II : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

1) f est une densité de probabilité d'une VA X si : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq 0 & (i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 & (ii) \end{cases}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{-x} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 0 + e^0 = 1 \quad (2)$$

Les deux conditions (i) et (ii) sont vérifiées $\Rightarrow f$ est une densité de probabilité d'une VA X

2) Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f . Calculer la fonction de répartition de la VA X

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0 ; & x < 0 \\ \int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} & ; x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-x} & ; x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

3) Déduire $P(X > 2)$

On a $P(X > 2) + P(X \leq 2) = 1 \Rightarrow P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-2})$

$$\Rightarrow P(X > 2) = e^{-2} = 0,135 \quad (2)$$

Exercice n°2 : « Statistiques » 8 pts

1) -La population statistique : 100 composants électroniques.

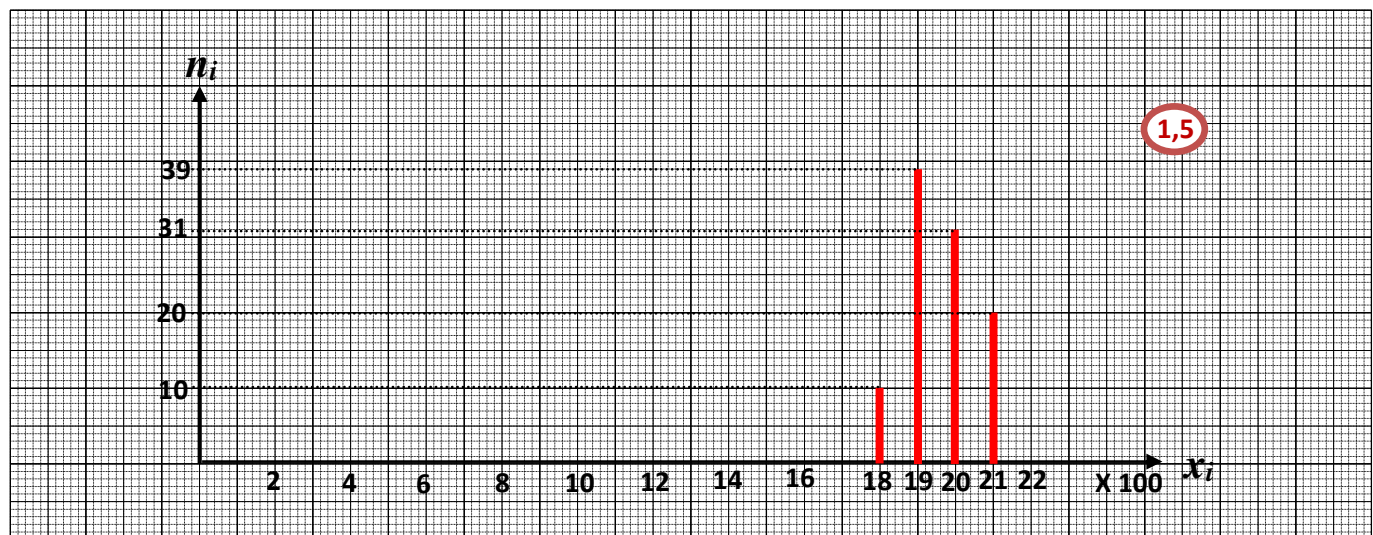
-Le caractère étudié : La durée de vie des composants.

-Type : quantitatif discret.

2) le tableau statistique

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i * x_i$	$n_i * x_i^2$
1800	10	10	$10/100 = 0.1$	$10/100 = 0.1$	18000	$3240 * 10^4$
1900	39	49	$39/100 = 0.39$	$49/100 = 0.49$	74100	$14079 * 10^4$
2000	31	80	$31/100 = 0.31$	$80/100 = 0.8$	62000	$12400 * 10^4$
2100	20	100	$20/100 = 0.2$	$100/100 = 1$	42000	$8820 * 10^4$
Σ	100	/	1	/	196100	$38539 * 10^4$

3) Le diagramme en bâtons des effectifs.



4) -Le Mode : $M_0=1900$

-La Médiane : $N = 100$ pair $\rightarrow p = \frac{n}{2} = 50; p + 1 = 51 \Rightarrow Me = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{2000 + 2000}{2} = 2000$

- La variance : $S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 \right) - (\bar{x}^2)$

$$\text{Avec : } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 n_i * x_i}{N} = \frac{196100}{100} = 1961 \rightarrow S_x^2 = \left(\frac{1}{100} * 38539 * 10^4 \right) - (1961^2) = 8379$$

5) Soit la répartition de la durée de vie des 620 composants électroniques d'une usine « B » :

Durée de vie (en 10^2 heures)	[5, 6[[6, 7[[7, 7.5 [[7.5, 9[[9, 10[
Nombre de composants électroniques	100	80	240	160	40
Centre de classe			7,25		

$$N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 620 \Rightarrow n_5 = 620 - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) = 620 - 580 = 40$$

$$\frac{C_i + C_{i+1}}{2} = 7,25 \Rightarrow C_{i+1} = 14,5 - C_i = 14,5 - 7 = 7,5$$