Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Février 2022**

2CPI **Contrôle final** **Durée : 2 heures**

Analyse mathématique 3

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Le sujet comporte 3 pages.

Veuillez répondre aux exercices sur le cahier.

Exercice 1 (4 points) :

Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{7^n.(n+1)}$.

1) Déterminer son rayon de convergence.

2) Déterminer son domaine de convergence.

3) a- Développer la fonction suivante en série entière :

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{7-t}, \quad \text{avec} \quad 0 < |x| < 7.$$

b- En déduire la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{7^n.(n+1)}$.

Exercice 2 (5,5 points) :

Soit la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique définie par :

$$f(x) = \cos(\alpha x) \ , \ x \in [-\pi, \pi] \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

1) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f puis donner sa série de Fourier.

3) Développer f en série de Fourier.

4) Déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.

3) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\cot g\,(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$, où $\pi\mathbb{Z} =$

$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Rappel:

$$\begin{aligned}
\cos a . \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right). \\
\sin a . \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right). \\
\sin a . \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points) :

Soient

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^3 .y. \exp(x+y)}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y. \cos(x)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f et g au point $(0,0)$.

2) Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

4) On pose $\Phi = (f,g)$.

Φ est elle différentiable au point $(0,0)$? Justifier la réponse.

Exercice 4 (3 points) :

1) Soit la fonction Ψ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par: $\Psi(x,y) = (3x+y, 2x+y)$.

Montrer que Ψ est un $\boldsymbol{C}^1-$difféomorphisme.

2) En posant:

$$\begin{cases} u = 3x+y, \\ v = 2x+y. \end{cases}$$

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{où} \quad f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right).$$

ESI. 2021/2022. CF- ANA3.

Veuillez répondre au questionnaire sur le sujet et le remettre dans le cahier.

Nom:
Prénom:
Groupe:

Questionnaire (2,5 points):

I- Soit f une application, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$. Pour chaque affirmation répondre (sans justifier) par $\boxed{\text{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\text{F}}$ sinon.

____ **A1 :** Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

____ **A2 :** Si f est discontinue en (a,b) alors f n'est pas définie en (a,b).

____ **A3 :** Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ alors $f \notin \boldsymbol{C}^3(\mathbb{R}^2)$.

____ **A4 :** Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe alors $(0,0)$ est un point d'accumulation de D.

____ **A5 :** Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$ alors $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$.

____ **A6 :** Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \geq 1\} \cup \left\{\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ alors $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un point frontière de D.

II- Compléter:

On appelle distance sur l'ensemble $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, une application notée d : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ (X,Y) & \to & d(X,Y) \end{array}$ vérifiant:

$i)$ −−−.

$ii)$ $d(X,Y) = d(Y,X)$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

$iii)$ −−.

III- Expliquer pourquoi la série trigonométrique

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}},$$

ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction localement intégrable et $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$.

La réponse de la partie III se fera au verso.

Un corrigé:

Exercice 1 :

1) On pose $a_n = \dfrac{1}{(n+1).7^n} > 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1).7^n}{(n+2).7^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{7}\boxed{0{,}5} \Rightarrow R = 7. \ \boxed{0{,}25}$$

2) Pour déterminer le domaine de convergence on doit faire l'étude aux bornes.

En $x = 7$: On a $\sum u_n(7) = \sum \dfrac{1}{n+1}$ diverge (série de Rieman). $\boxed{0{,}5}$

En $x = -7$: On a $\sum u_n(-7) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est série altérnée qui satisfait le critère de Leibnitz, donc convergente $\boxed{0{,}75}$.

En conclusion le domaine de convergence de la série donnée est

$$D = [-7, 7[\longleftarrow \ \boxed{0{,}25}$$

3) a– On a pour tout x tel que $0 < |x| < 7$:

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{7-t}\right) dt = \frac{1}{7}\int_0^x \left(\frac{1}{1-\frac{t}{7}}\right) dt = \frac{1}{7}\int_0^x \sum_{n\geq 0}\left(\frac{t}{7}\right)^n dt \ \boxed{0{,}5}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}\int_0^x \left(\frac{t}{7}\right)^n dt = \frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{7}\right)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,7^{n+1}}. \ \boxed{0{,}5}$$

En fait on a utilisé que pour tout $y \in]-1,1[$ on a $\sum_{n\geq 0} y^n = \dfrac{1}{1-y}$.

b- Deduction :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{(n+1)\,7^n} = \begin{cases} \dfrac{7}{x}\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,7^{n+1}} & \text{si } x \neq 0, \ \boxed{0{,}25} \\ 1 & \text{si } x = 0. \ \boxed{0{,}25} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{7}{x}f(x) \text{ si } x \neq 0, \ \boxed{0{,}25} \\ 1 \quad \text{si } x = 0. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{7}{x}\left[\log 7 - \log(7-x)\right] & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 :

1) Le graphe $\boxed{0{,}5}$

2) f est intégrable sur tout férmé borné de $\mathbb{R}$ (elle est localement intégrable sur

$\mathbb{R}$) $\boxed{0{,}25}$ donc $\mathcal{F}f$ existe.
Calculons les coéfficients de la série de Fourier associée à f :
f étant paire $b_n = 0$ $\boxed{0{,}5}$ et ceci $\forall n \geq 1$.
* $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\alpha x)\,dx = \left[\frac{2}{\alpha\pi}\sin(\alpha x)\right]_0^\pi = \frac{2\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$ $\boxed{0{,}25}$.
* $a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[\cos((\alpha+n)x) + \cos((\alpha-n)x)\right]dx$ ie :
$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right] = (-1)^n . \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}$ $\boxed{0{,}5}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } \mathcal{F}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n . \cos(nx) \boxed{0{,}25} \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n . \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} . \cos(nx) .\end{aligned}$$

3) Appliquons le corrolaire de Dirichlet sur $[0,\pi]$ car f est $2\pi-$périodique paire $\boxed{0{,}25}$.
$\rightsquigarrow$ f est C^1 par morceaux car:
$\rightsquigarrow$ $f_{/]0,\pi[}(x) = \cos(\alpha x)$ est de classe C^1 $\boxed{0{,}5}$ et $f\ '_{/]0,\pi[}(x) = -\alpha\sin(\alpha x)$;
$\lim\limits_{x\to 0^+} f\ '_{/]0,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-} f\ '_{/]0,\pi[}(x) = -\pi\sin(\alpha\pi) \in \mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le graphe) donc la série de Fourier $\mathcal{F}(f)$ associée à f est égale à f sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}5}$ ie f est developpable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$, en particulier on a:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n . \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} . \cos(nx) \overset{(*)}{=} \cos(\alpha x)\,;\ \forall x \in [0,\pi]\ \boxed{0{,}25}.$$

4) Pour déduire la somme S donnée il suffit de remplacer $x = \pi$ $\boxed{0{,}25}$ dans la relation précédente :

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \left(\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\right)S,$$

donc

$$S = \left(\cos(\alpha\pi) - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}\right)\ \boxed{0{,}5}.$$

3) On remplace dans l'égalité $(*)$ $x = \pi$ et on divise par :$\sin(\alpha\pi)$,on obtient:

$$\cot g(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{2\alpha}{(\alpha^2-n^2)\pi},\ \forall\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\ \boxed{0{,}5}$$

Finalement il suffit de prendre en particulier $\alpha = \dfrac{x}{\pi}$, (ie $x = \alpha\pi$) on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} : \cot g\,(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \boxed{0{,}5}.$$

Exercice 3 :

1) Etude de la continuité de f en $(0,0)$:

A t-on $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$

$\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,b)} \dfrac{|x|^3 y.\exp(x+y)}{x^2+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^4}}_{\text{bornée}}.\underbrace{|x|\,y}_{\text{tend vers 0}}.\underbrace{\exp(x+y)}_{\text{tend vers 1}} =$

0 $\boxed{0{,}5}$.

Donc f est continue en $(0,0)$ $\boxed{0{,}25}$.

Etude de la continuité de g en $(0,0)$:

A t-on $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0.$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y.\cos(x)}{x^2+y^2}$,utilisons le chemin $y = x$ $\boxed{0{,}5}$:

$$\lim_{x\to 0} g(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2x},$$

cette limite n'est pas égale à 0 (elle n'existe pas), ce chemin suffit.

On en conclut que g n'est pas continue en $(0,0)$ $\boxed{0{,}25}$.

2) Calculons (si elles existent) les dérivées partielles premières en $(0,0)$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$ 0 $\boxed{0{,}25}$ $\exists$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ $\boxed{0{,}25}$ $\exists$.

3) $\rightsquigarrow$ Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: f est de classe C^1 car f est le rapport, produit et composée de fonctions C^1 (polynômes, expo) ce qui implique que f est différentiable $\boxed{0{,}5}$.

$\rightsquigarrow$ En $(0,0)$: Utilisons la définition :

$f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - \left[h_1.\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2.\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = \|(h_1,h_2)\|.\varepsilon(h_1,h_2)$ $\boxed{0{,}5}$.

ie $f(h_1,h_2) = \|(h_1,h_2)\|.\varepsilon(h_1,h_2)$, choisissons la norme euclidienne:

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{|h_1|^3.h_2.\exp(h_1+h_2)}{(h_1^2+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ $\boxed{0{,}5}$.

Donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \underbrace{\dfrac{h_1^2}{(h_1^2+h_2^4)}}_{\text{bornée}}.\underbrace{\dfrac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{bornée}}.\underbrace{h_2.\exp(x+y)}_{\text{tend vers 0}} =$

0 $\boxed{0{,}5}$.

On obtient alors $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$ $\boxed{0{,}25}$.

On en conclut que f est différentiable en $(0,0)$ $\boxed{0{,}25}$.

4) Comme g n'est pas différentiable en $(0,0)$ puisqu'elle n'y est pas continue

$\boxed{0{,}25}$,

alors Φ n'est pas différentiable au point $(0, 0)$ $\boxed{0{,}25}$.

Exercice 4 :

1) $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\Psi(x,y) = (3x+y, 2x+y) = (\Psi_1(x,y), \Psi_2(x,y))$.
Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ trouvons un unique (x,y) tel que $\Psi(x,y) = (u,v)$.
$\Psi(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} 3x+y = u \\ 2x+y = v \end{cases}$; ce système étant un système linéaire, il admet une unique solution qui est $\begin{cases} x = u - v \\ y = -2u + 3v \end{cases}$ $\boxed{0{,}25}$. Ψ est donc bijective .
de plus $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ car ses composantes le sont (polynômes) $\boxed{0{,}5}$.
de meme $\Psi^{-1}(u,v) = (x,y) = (u-v, -2u+3v) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ car ses composantes le sont (polynômes) $\boxed{0{,}25}$.
Remarque: Cette question peut être notée avec la question suivante.
2) Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{où} \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

On a $f(x,y) = f(\Psi^{-1}(u,v)) = f \circ \Psi^{-1}(u,v)$. Posons alors $F = f \circ \Psi^{-1}$ ie $f = F \circ \Psi$ $\boxed{0{,}25}$.
Exprimons les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de F; pour cela vérifions les hypothèses du théorème de composition $\boxed{0{,}25}$:
F et Ψ sont C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car Ψ est un difféomorphisme et F est la composée de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc

$$J_{(x,y)}f = J_{(u,v)}F \times J_{(x,y)}\Psi, \ \boxed{0{,}25}$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ \boxed{0{,}25}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3\frac{\partial F}{\partial u} + 2\frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \end{cases} \quad \boxed{0{,}25}$$

Remplaçons dans l'EDP:
$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \iff F(u,v) = H(u)$ où $H \in C^1(\mathbb{R})$ $\boxed{0{,}5}$.
Les solutions de l'EDP sont donc les fonctions qui s'écrivent:

$$f(x,y) = H(3x+y) \ / \ H \in C^1(\mathbb{R}) \ \boxed{0{,}25}.$$

Questionnaire :

I- Soit f une application, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$. Pour chaque affirmation répondre (sans justifier) par $\boxed{\text{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\text{F}}$ sinon. $\boxed{0{,}25}$ par bonne réponse.

$\boxed{\text{F}}$ **A1 :** Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x, kx) = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

$\boxed{\text{F}}$ **A2 :** Si f est discontinue en (a, b) alors f n'est pas définie en (a, b).

$\boxed{\text{V}}$ **A3 :** Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ alors $f \notin \boldsymbol{C}^3(\mathbb{R}^2)$.

$\boxed{\text{V}}$ **A4 :** Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe alors $(0, 0)$ est un point d'accumulation de D.

$\boxed{\text{V}}$ **A5 :** Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = +\infty$ alors $\lim\limits_{y \to b}\left(\lim\limits_{x \to a} f(x, y)\right) = \lim\limits_{x \to a}\left(\lim\limits_{y \to b} f(x, y)\right)$.

$\boxed{\text{V}}$ **A6 :** Si $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \geq 1\right\} \cup \left\{\left(0, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$ alors $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est un point frontière de D.

II- Compléter:

On appelle distance sur l'ensemble $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, une application notée d : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ (X, Y) & \to & d(X, Y) \end{array}$ vérifiant:

i) $d(X, Y) = 0 \iff X = Y$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$. $\boxed{0{,}25}$

ii) $d(X, Y) = d(Y, X)$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

iii) $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$. $\boxed{0{,}25}$

III- Car d'après le théorème de Parseval la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n},$$

serait convergente etceci n'est pas le cas. $\boxed{0{,}5}$