

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

**CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES
A NUEVO INGRESO**



CURSO DE FISICA

TEMA 5: Vectores parte 2.

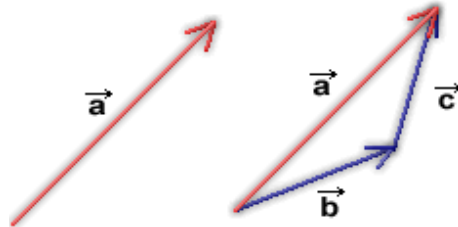
CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Contenido

4.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR.....	1
Suma de vectores por componentes rectangulares.....	2
4.7 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR	4
4.8 VECTORES UNITARIOS.	4
Suma y resta de vectores con vectores unitarios.....	5
4.9 PRODUCTO ESCALAR	7
4.10 PRODUCTO VECTORIAL	9
Regla de la mano derecha:	9

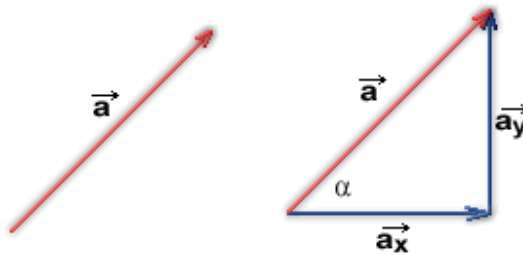
4.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UN VECTOR.

Todo vector \vec{a} se puede expresar como la suma de otros dos vectores \vec{b} y \vec{c} a los cuales se les denomina componentes del vector a . Como se ilustra en la figura.



En ésta el vector rojo tiene como componentes los vectores azules. Estos últimos sumados componen al vector rojo.

Cuando las componentes forman un ángulo recto (90°) ó son mutuamente perpendiculares, se les llama componentes rectangulares. En la figura se ilustran las componentes rectangulares del vector rojo.



¿Qué relaciones cumplen las componentes rectangulares?

$$a_x = a \cos \alpha$$

$$a_y = a \sin \alpha$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x}$$

Ejemplo:

Una fuerza \vec{F} tiene magnitud igual a 10.0 N y dirección igual a 240° respecto al eje positivo x. Encuentre las componentes rectangulares y represéntelas en un plano cartesiano.

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

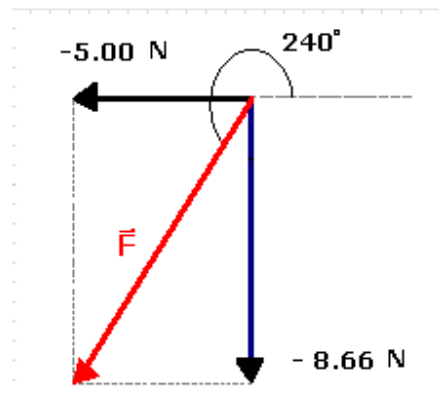
Solución:

Cálculo de las respectivas componentes:

$$F_x = (10.0)(\cos 240^\circ) = -5.00\text{ N}$$

$$F_y = (10.0)(\sin 240^\circ) = -8.66\text{ N}$$

El resultado nos lleva a concluir que la componente de la fuerza en X tiene magnitud igual a 5.00 N y apunta en dirección negativa del eje X. La componente en Y tiene magnitud igual a 8.66 y apunta en el sentido negativo del eje Y. Esto se ilustra en la figura.



Suma de vectores por componentes rectangulares

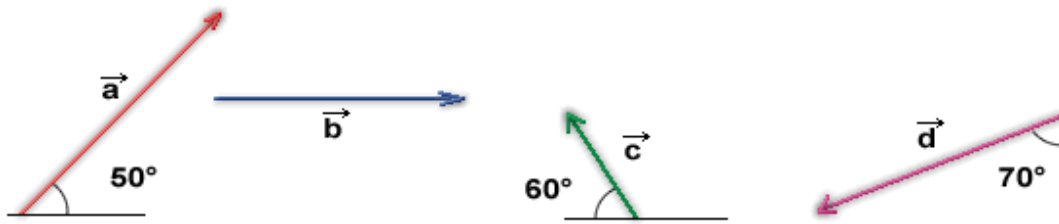
Cuando se efectúa la suma de vectores, se puede optar por descomponerlos en sus componentes rectangulares y luego realizar la suma vectorial de estas. El vector resultante se logrará componiéndolo a partir de las resultantes en las direcciones x e y.

A continuación se ilustra este método por medio del siguiente ejemplo.

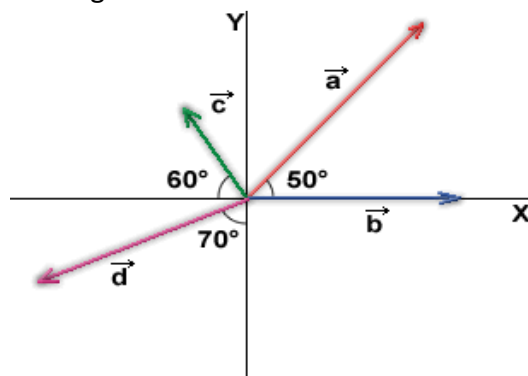
Ejemplo:

A partir de los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} y \vec{d} mostrados en la siguiente figura efectuar la suma de ellos, mediante el método de componentes rectangulares. Si sus magnitudes son respectivamente 8.0 N, 7.5 N, 4.3 N y 7.8 N

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO



Lo primero que debemos hacer es graficarlos en un plano cartesiano, de esta forma se muestran los vectores ubicados en un cuadrante dado y luego se procede a obtener las componentes rectangulares tal como ilustra la figura.



Cálculo de las componentes rectangulares, midiendo los ángulos respecto al eje positivo de las x:

$$a_x = (8.0)(\cos 50^\circ) = 5.1 \quad a_y = (8.0)(\sin 50^\circ) = 6.2$$

$$b_x = 7.5 \quad b_y = 0$$

$$c_x = (4.3)(\cos 120^\circ) = -2.2 \quad c_y = (4.3)(\sin 120^\circ) = 3.7$$

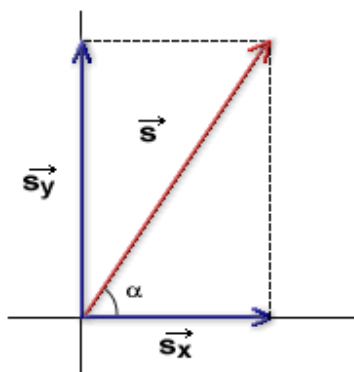
$$d_x = (7.8)(\cos 200^\circ) = -7.3 \quad d_y = (7.8)(\sin 200^\circ) = -2.7$$

A continuación se realiza las sumas de las componentes en X y de las componentes en Y, cada una con su respectivo signo:

$$S_x = 5.1 + 7.5 - 2.2 - 7.3 = 3.1$$

$$S_y = 6.2 + 0 + 3.7 - 2.7 = 7.2$$

Representamos S_x y S_y en el plano cartesiano.



Cálculo de la magnitud de la resultante y su dirección:

$$S = \sqrt{(S_x)^2 + (S_y)^2} = \sqrt{(3.1)^2 + (7.2)^2} = 7.9$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{S_y}{S_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7.2}{3.1}\right) = 67^\circ$$

Observe que S y α son las características de un vector.

[http://www.meet-physics.net/David-](http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/VectorAddComponents/VectorAddComponents.html)

[Harrison/castellano/Vectors/VectorAddComponents/VectorAddComponents.html](http://www.meet-physics.net/David-Harrison/castellano/Vectors/VectorAddComponents/VectorAddComponents.html)

4.7 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sea \vec{V} un vector cualquiera y q una cantidad escalar. El producto $q\vec{V}$ es otro vector que se define así:

a) Cuando q es adimensional:

El vector $q\vec{V}$ conserva las mismas unidades que \vec{V} . Su magnitud es $q|\vec{V}|$.

Si $q > 0$, el vector $q\vec{V}$ tiene la misma dirección y sentido que \vec{V} .

Si $q < 0$, el vector $q\vec{V}$ tiene la misma dirección pero en sentido contrario de \vec{V} .

Si $q = 0$, entonces $q\vec{V} = \mathbf{0}$. (Vector cero).

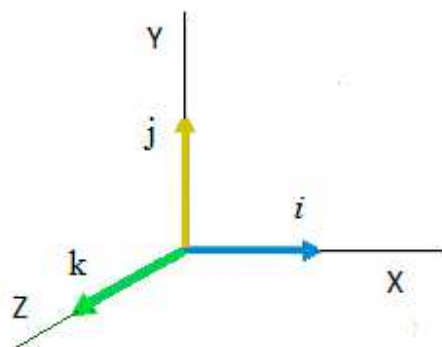
4.8 VECTORES UNITARIOS.

Un vector unitario es un vector cuya magnitud vale uno y se obtiene al dividir un vector \vec{V} cualquiera (distinto de cero) entre su magnitud $|\vec{V}|$.



El vector \hat{u} tiene la misma dirección y sentido que \vec{V} y además es adimensional, es decir no tiene unidades. Aplicando el concepto del producto de un vector por un escalar, \vec{V} puede expresarse así: $\vec{V} = |\vec{V}| \hat{u} = V \hat{u}$

En un sistema de coordenadas rectangulares se reconocen los vectores unitarios i , j y k , que apuntan respectivamente en el sentido positivo de los ejes X , Y y Z , y son mutuamente perpendiculares tal como se ilustra en la figura.



Dado que cualquier vector puede expresarse en términos de sus componentes rectangulares: el vector \vec{V} también puede escribirse así: $\vec{V} = V_x i + V_y j + V_z k$

Suma y resta de vectores con vectores unitarios

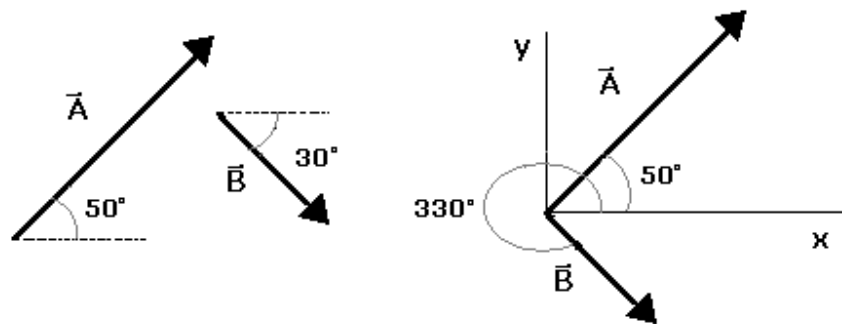
Los vectores unitarios resultan de gran utilidad en la suma y resta de vectores.

Ejemplo 1: (Suma)

Se tienen dos vectores \vec{A} y \vec{B} , si sus magnitudes son respectivamente 10 unidades y 5 unidades, efectuar la suma $\vec{A} + \vec{B}$, utilizando vectores unitarios.

El primer paso es ubicar los vectores en un sistema de coordenadas rectangulares

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO



Cálculo de las componentes de cada vector:

$$A_x = A \cos 50^\circ = 10.0 \cos 50^\circ = 6.4$$

$$A_y = A \sin 50^\circ = 10.0 \sin 50^\circ = 7.7$$

$$B_x = B \cos 330^\circ = 4.3$$

$$B_y = B \sin 330^\circ = -2.5$$

Expresando los vectores en función de sus componentes.

$$\vec{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} = 6.4 \mathbf{i} + 7.7 \mathbf{j}$$

$$\vec{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} = 4.3 \mathbf{i} - 2.5 \mathbf{j}$$

El vector suma resultante es: $\vec{S} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} = 10.7 \mathbf{i} + 5.2 \mathbf{j}$

$$\vec{S} = (10.7 \mathbf{i} + 5.2 \mathbf{j}) \text{ unidades}$$

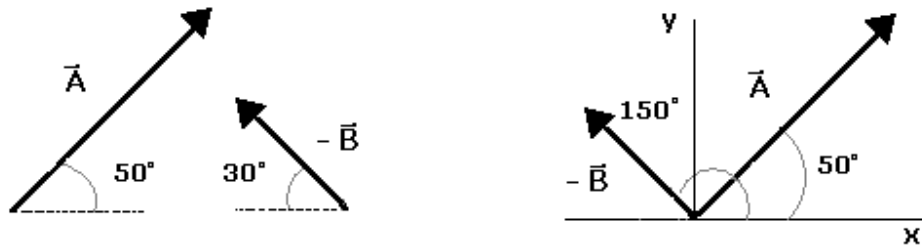
$$\text{magnitud: } |\vec{S}| = \sqrt{10.7^2 + 5.2^2} = 11.9 \text{ unidades}$$

$$\text{ángulo: } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5.2}{10.7}\right) = 25.9^\circ$$

Ejemplo 2 (Resta)

Con los vectores del ejemplo anterior realizar la resta: $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

La resta es un caso particular de la suma $\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$



Expresando los vectores en función de sus componentes.

$$\vec{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} = 6.4 \mathbf{i} + 7.7 \mathbf{j}$$

$$\vec{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} = -4.3 \mathbf{i} + 2.5 \mathbf{j}$$

El vector suma resultante es: $\vec{R} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} = 2.1 \mathbf{i} + 10.2 \mathbf{j}$

$$\vec{R} = (2.1 \mathbf{i} + 10.2 \mathbf{j}) \text{ unidades}$$

$$\text{magnitud: } |\vec{R}| = \sqrt{2.1^2 + 10.2^2} = 10.4 \text{ unidades}$$

$$\text{ángulo: } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10.2}{2.1}\right) = 78.4^\circ$$

Producto entre dos vectores

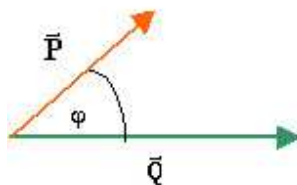
Existen dos tipos de productos entre vectores: El producto escalar y el producto vectorial.

4.9 PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de dos vectores \vec{P} y \vec{Q} se expresa así: $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ se conoce como producto "punto"

Por definición, el producto escalar entre \vec{P} y \vec{Q} es igual al producto de sus respectivas magnitudes por el coseno del menor ángulo que forman entre ellos al colocarlos origen con origen, tal como se muestra en la figura.

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \mu$$

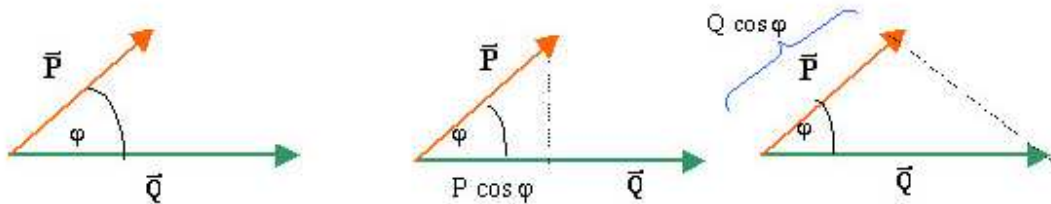


El resultado de este producto es una cantidad escalar. Si observamos la siguiente figura podemos interpretar esta operación vectorial como el producto de la proyección del vector \vec{P} ($P \cos \varphi$)

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

multiplicado por la magnitud de \vec{Q} . En forma equivalente se puede proyectar el vector \vec{Q} sobre \vec{P} ($Q \cos \varphi$) multiplicado por la magnitud de \vec{P} .

Muchas relaciones físicas se pueden expresar como este producto. Llevamos los dos vectores a un origen común, siendo φ el ángulo que forman entre sí los vectores \vec{P} y \vec{Q} .



El producto escalar es un número, y puede ser positivo, negativo o cero. Dependiendo de las unidades de \vec{P} y \vec{Q} el producto escalar tiene unidades.

Si el ángulo entre los vectores es menor que 90° el producto escalar es positivo, si es mayor que 90° pero menor que 180° el producto es negativo y si es igual a 90° el producto escalar es igual a cero.

Ejemplo:

Dos vectores \vec{P} y \vec{Q} cuyas magnitudes son iguales a 20.4 unidades y 30.6 unidades forman un ángulo de 60° entre ellos. Calcular su producto escalar.

Solución:

Según la definición: $\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ \cos \psi$

Por tanto: $\vec{P} \bullet \vec{Q} = (20.4)(30.6) \cos 60^\circ = 312.1$ unidades

Ejemplo

Calcular el producto escalar $\vec{A} \bullet \vec{B}$ y el ángulo entre vectores, si

$\vec{A} = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\vec{B} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \bullet (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 15 + 0 - 12 = 3$$

Cálculo del ángulo entre los vectores. \vec{A} y \vec{B}

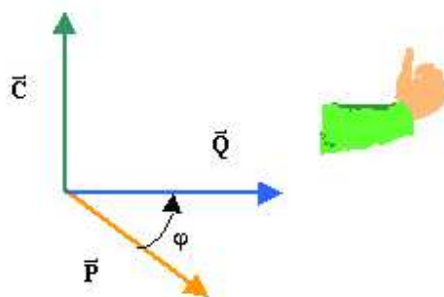
$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB} ; |\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6.70 ; |\vec{B}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = 6.2$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{(6.70)(6.2)} = 0.72 ; \cos^{-1} 0.72 = 85.8^\circ = \varphi$$

4.10 PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial entre dos vectores \vec{P} y \vec{Q} lo representamos por $\vec{P} \times \vec{Q}$. Se conoce como producto "Cruz".

Para definirlo llevamos ambos vectores a un origen común. A diferencia con el producto escalar, el resultado de este producto es un vector, cuya dirección es perpendicular al plano que contiene a los vectores \vec{P} y \vec{Q} . El sentido se obtiene aplicando la denominada *regla de la mano derecha* y cuya magnitud es igual al producto entre las magnitudes de los vectores por el seno del ángulo que forman (ver figura). Es decir:



$$|\vec{P} \times \vec{Q}| = PQ \sin \varphi$$

Cuando los vectores \vec{P} y \vec{Q} son paralelos (ángulo entre ellos igual a 0°) o antiparalelos (ángulo entre ellos igual a 180°) el producto vectorial será nulo. En particular, el producto vectorial de un vector \vec{A} por sí mismo es igual a cero, es decir $\vec{A} \times \vec{A} = 0$.

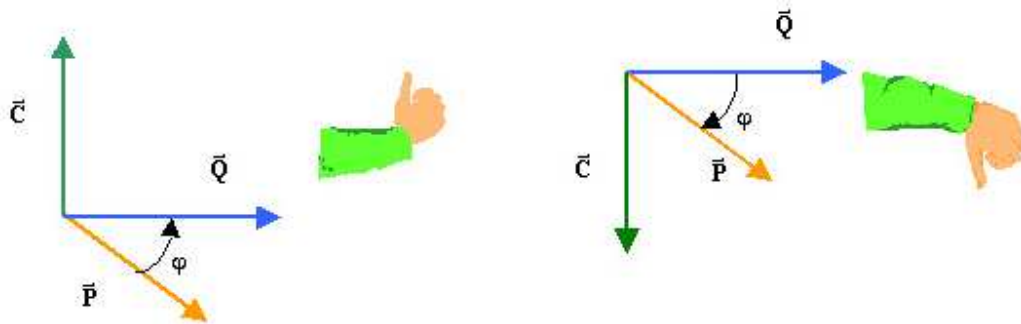
Regla de la mano derecha:

El sentido del producto vectorial se obtiene aplicando la regla de la mano derecha así: Se coloca la palma de nuestra mano derecha en la dirección del vector \vec{P} y envolvemos nuestros dedos en el sentido de rotación hacia el vector \vec{Q} eligiendo siempre el menor ángulo. El sentido en que apunta el pulgar, es el sentido del producto vectorial \vec{C} (ver figura).

Como podrá observar no es lo mismo hacer el producto vectorial de $\vec{P} \times \vec{Q}$ que el de $\vec{Q} \times \vec{P}$. En los dos casos tanto la magnitud como la dirección no cambian pero el sentido es opuesto (ver figura).

El producto vectorial no es conmutativo. Es decir que: $\vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$.

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO



Ejemplo:

Calcular el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ y comprobar que el vector \vec{C} es perpendicular a los vectores multiplicando, si $\vec{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\vec{B} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \vec{C}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3\mathbf{i}) \times (2\mathbf{i}) + (3\mathbf{i}) \times (4\mathbf{j}) + (3\mathbf{i}) \times (2\mathbf{k}) + (6\mathbf{j}) \times (2\mathbf{i}) + (6\mathbf{j}) \times (4\mathbf{j}) + (6\mathbf{j}) \times (2\mathbf{k})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 + 12\mathbf{k} - 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} + 0 + 12\mathbf{i}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 12\mathbf{i} - 6\mathbf{k} = \vec{C}$$

Comprobación de que el vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano generado por los vectores multiplicando \vec{A} y \vec{B} . Anteriormente expresamos que:

Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es igual a cero.

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = AC \cos \varphi \quad ; \quad \cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{AC}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6.70 \quad ; \quad |\vec{B}| = \sqrt{12^2 + 6^2} = 13.42 \quad ; \quad \vec{A} \cdot \vec{C} = 0 \quad ;$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{AC} = \cos \varphi = \frac{0}{AC} \quad ; \quad \cos \varphi = 0 \quad ; \quad \varphi = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$