അദ്ധ്യായം 5

കേന്ദ്ര പ്രവണത (CENTRAL TENDENCY)

പഠന കുറിപ്പുകൾ

കേന്ദ്ര പ്രവണത (CENTRAL TENDENCY)

ഒരു ഡാറ്റയിലെ വിലകൾ അതിലെ ഒരു കേന്ദ്രവിലയ്ക്കു ചുറ്റും കൂടിച്ചേരാൻ കാണിക്കുന്ന പ്രവണതയാണ് കേന്ദ്രപ്രവണത.

കേന്ദ്രപ്രവണതാ മാനങ്ങൾ (Measures of Central tendency)

കേന്ദ്രപ്രവണതാ മാനങ്ങളെ ശരാശരികൾ എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. വിവിധയിനം ശരാശരികൾ ഉണ്ട്. നല്ല ഒരു ശരാശരിയ്ക്കു അഭിലഷണീയമായ പ്രത്യേകതകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1. ലളിതവും കൃത്യതയുമുള്ള നിർവചനം.
2 . മനസിലാക്കുന്നതിന് ലളിതവും കണക്കുകൂട്ടലിന് എളുപ്പവുമുള്ളതാകണം.
3. എല്ലാ വിലകളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാകണം.
4. ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ചെറുതും ഏറ്റവും വലുതുമായ വിലകളുടെ സ്വാധീനം തീരെ കുറവാകണം.
5. പ്രതിരൂപങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന (sampling) മാറ്റത്തിന്റെ സ്വാധീനം തീരെ കുറവാകണം.
6. തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്കു ഉതകുന്നതാകണം.

മികച്ച ശരാശരികളിൽ ചിലത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1. മാധ്യം (Arithmetic Mean or Mean)
2. മധ്യാങ്കം (Median)
3. മോഡ് (Mode)
4. ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (Geometric Mean)
5. സന്തുലിത മാധ്യം (Harmonic Mean)

മാധ്യം (Arithmetic Mean or Mean)

സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഏറ്റവും മികച്ച ഒരു ശരാശരിയാണ് മാധ്യം.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\text{പ്രാപ്തങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്തങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

ഒരു നല്ല ശരാശരിക്കുവേണ്ട ഭൂരിഭാഗം പ്രത്യേകതകളും മാധ്യം പാലിക്കുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ മാധ്യത്തെ ഏറ്റവും മികച്ച ശരാശരിയായി കണക്കാക്കാറുണ്ട്.

മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

(i) ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ (**raw data**) മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നത് ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ n വിലകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ മാധ്യത്തെ നമുക്ക് $\bar{x}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

കുറിപ്പ് :- നമുക്കറിയാം

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\therefore \sum x = n\bar{x}$$

അതായത് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക = $n\bar{x}$

ഉദാ 1:- 8 നവജാത ശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കിലോഗ്രാമിൽ) 2.4, 2.8, 3.2, 1.9, 2.7, 4.2, 3.8, 2.2 ആകുന്നു. ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

ഉത്തരം

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2.4 + 2.8 + \cdots + 2.2}{8} = \frac{23.2}{8} = \underline{\underline{2.9}}$$

ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം = 2.9 Kg

ഉദാ 2:- 8 സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 5 ആണ്. ഇതിൽ 7 സ്കോറുകൾ 9, 3, 4, 5, 6, 4, 7 എന്നിവ അയാൾ എട്ടാമത്തെ സ്കോർ എത്രയായിരിക്കും.

ഉത്തരം

$n = 8,\ \bar{x} = 5$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ 7 സ്കോറുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു എട്ടാമത്തേത് കാണണം. എട്ടാമത്തെ സ്കോർ x ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

സ്കോറുകളുടെ തുക = $n\bar{x} = 8 \times 5 = 40$

$ie,\ 9 + 3 + 4 + 5 + 6 + 4 + 7 + x = 40$

$\Rightarrow \quad 38 + x = 40$

$\therefore x = 40 - 38 = \underline{\underline{2}}$

എട്ടാമത്തെ സ്കോർ = 2.

ഉദാ **3**:-100 വിലകളുടെ മാധ്യം 49 ആണ്. 3 വിലകളായ 60, 70, 80 എന്നിവയ്ക്ക് പകരം 16, 17, 18 എന്നീ വിലകളാണ് പരിഗണിച്ചിരുന്നതെന്ന് പിന്നീട് മനസ്സിലായി. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.

ഉത്തരം

$n=100$, $\bar{x}=49$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു. മാധ്യം കണ്ടിരുന്ന സമയത്ത് 60, 70, 80 എന്നിവയ്ക്ക് പകരം 16, 17, 18 എന്നിവയാണ് പരിഗണിച്ചിരുന്നത്. ശരിയായ മാധ്യം കാണണം.

വിലകളുടെ തുക $= n\bar{x} = 100 \times 49 = 4900$

ശരിയായ തുക = $4900 - 16 - 17 - 18 + 60 + 70 + 80 = 5059$

ശരിയായ മാധ്യം = $\dfrac{5059}{100} = \underline{\underline{50.59}}$

(ii) ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ (discrete frequency table) മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും അവയുടെ ആവൃത്തിയും ഉണ്ടായിരിക്കും. പ്രാപ്താങ്കങ്ങളായ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നിവയുടെ ആവൃത്തികൾ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അവയുടെ മാധ്യം എന്നത്:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 +, f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$$

ഇവിടെ $N = \sum f$

ഉദാ 1:- ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 150 കുടുംബങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	:0	1	2	3	4	5
കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം	:10	21	55	42	15	7

കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

ഉത്തരം

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

കുട്ടികളുടെ എണ്ണം (x)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം (f)	fx
0	10	0
1	21	21
2	55	110
3	42	126
4	15	60
5	7	35
ആകെ	N = 150	352

$\therefore \bar{x} = \frac{352}{150} = 2.35$ കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം = 2.35

ഉദാ 2:- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 115.61 ആണ്. ആവൃത്തിയിലെ ചില വിലകൾ നഷ്ടമായിരിക്കുന്നു. അവയെ കണ്ടെത്തുക.

വിലകൾ	:	110	112	113	117	120	125	128	130	ആകെ
ആവൃത്തി	:	25	?	13	?	14	8	6	2	100

ഉത്തരം

$\bar{x} = 115.61$

112 എന്ന വിലയുടെ ആവൃത്തി '*f*' ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ 117 ന്റെ ആവൃത്തി $= 100 - (25 + 13 + 14 + 8 + 6 + 2 + f)$

$= 100 - (68 + f) = 32 - f$

വിലകൾ (x)	ആവൃത്തി (f)	fx
110	25	2750
112	f	112f
113	13	1469
117	32-f	117(32-f)
120	14	1680
125	8	1000
128	6	768
130	2	260
ആകെ	N = 100	7927+112f+117(32-f)

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$ie, 115.61 = \frac{7927 + 112f + 117(32 - f)}{100}$$

$$\Rightarrow 115.61 \times 100 = 7927 + 112f + 3744 - 117f$$

$$\Rightarrow 11561 = 11671 - 5f$$

$$\Rightarrow 5f = 11671 - 11561 = 110$$

$$\Rightarrow f = \frac{110}{5} = \underline{\underline{22}}$$

112 ന്റെ ആവൃത്തി = 22

അപ്പോൾ 117 ന്റെ ആവൃത്തി $= 32 - 22 = \underline{\underline{10}}$

(iii) ഒരു തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ (continuous frequency table) മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു തുടരാവൃത്തി പട്ടികയിൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ ക്ലാസ്സുകളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മാധ്യം കാണുന്നതിന് സമാനമായ മാർഗമാണ് ഇവിടെയും ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇവിടെ ക്ലാസ്സുകളുടെ മധ്യവിലയാണ് പ്രാപ്താങ്കമായി എടുക്കുന്നത്. മാധ്യം കാണുന്നതിനുള്ള സമവാക്യം $\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$ എന്നുതന്നെയാണ്.

ഉദാ 1:- ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഒരു ദിവസം ചികിത്സക്കു വിധേയരാകുന്ന 360 രോഗികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

വയസ്സ്	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
രോഗികളുടെ എണ്ണം	90	50	60	80	50	30

ഉത്തരം

വയസ്സ്	രോഗികളുടെ എണ്ണം (f)	മധ്യവില (x)	fx
10-20	90	15	1350
20-30	50	25	1250
30-40	60	35	2100
40-50	80	45	3600
50-60	50	55	2750
60-70	30	65	1950
ആകെ	N = 360		13000

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{13000}{360} = \underline{\underline{36.11}}$$

വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം = 36.11

ഉദാ 2:- അഭിപ്രായ വോട്ടെടുപ്പിന്റെ ഭാഗമായി ഒരു സംഘടന 200 പേരെ അഭിമുഖത്തിന് വിധേയമാക്കുന്നു. അവരുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

വയസ്സ്	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39	20-29	10-19
ആവൃത്തി	2	2	6	20	56	40	42	32

ഉത്തരം

വയസ്സ്	ആവൃത്തി (f)	മധ്യവില (x)	fx
80-89	2	84.5	169
70-79	2	74.5	149

60-69	6	64.5	387
50-59	20	54.5	1090
40-49	56	44.5	2492
30-39	40	34.5	1380
20-29	42	24.5	1029
10-19	32	14.5	464
ആകെ	**200**		**7160**

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{7160}{200} = \underline{\underline{35.8}}$$

വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം = 35.8

മാധ്യത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

- മാധ്യത്തിൽ നിന്നും എല്ലാവിലകൾക്കുമുള്ള അന്തരങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യം ആയിരിക്കും. അതായത് $\sum (x - \bar{x}) = 0$.
- ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രപ്തങ്കങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് മാധ്യത്തിൽ നിന്നും അന്തരങ്ങളെടുക്കുമ്പോഴാണ്. അതായത് $\sum (x - a)^2$ ന്റെ വില ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് $a = \bar{x}$ ആകുമ്പോഴാണ്.
- ഒരു ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ വിലകളോടും 'a' കൂട്ടിയാൽ മാധ്യത്തിനോടും 'a' കൂട്ടണം.
- ഒരു ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ വിലകളിൽ നിന്നും 'a' കുറച്ചാൽ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും 'a' കുറയ്ക്കണം.
- ഒരു ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ വിലകളെയും 'a' കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മാധ്യത്തിനെയും 'a' കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം.
- ഒരു ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ വിലകളെയും 'a' കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മാധ്യത്തിനെയും 'a' കൊണ്ട് ഹരിക്കണം.

പരിഗണനാ മാധ്യം (WEIGHTED ARITHMETIC MEAN)

ഒരു പ്രാപ്താങ്കത്തിന് നൽകുന്ന പ്രാധാന്യത്തിനെയാണ് അതിന്റെ പരിഗണനാ (weight) എന്ന് പറയുന്നത്. ഇതുവരെ നാം മാധ്യം കണ്ടുപിടിച്ച അവസരങ്ങളിൽ എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും ഒരേ പ്രാധാന്യമായിരുന്നു. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ പരിഗണന യഥാക്രമം $w_1, w_2, \cdots, w_n$ എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അവയുടെ പരിഗണനാ മാധ്യം എന്നത്:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$ ആയിരിക്കും.

ഉദാ:- ഒരു ഭൗതിക ശാസ്ത്ര പാഠ്യക്രമത്തിലെ മൂന്ന് ഭാഗങ്ങളായ ലബോറട്ടറി, വ്യാഖ്യാനം, പാരായണം എന്നീ മേഖലകളിൽ ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 71, 78, 89 എന്നിവയാണ്.

a) ആ സ്കോറുകൾക്ക് നൽകിയിരിക്കുന്ന പരിഗണനകൾ യഥാക്രമം 2, 3, 5 ആയാൽ ശരാശരി സ്കോർ എന്തായിരിക്കും?

b) ഒരേ പരിഗണനയാണ് നൽകുന്നതെങ്കിൽ ശരാശരി സ്കോർ എന്തായിരിക്കും?

ഉത്തരം

a) ഇവിടെ 71, 78, 89 എന്നിവയ്ക്ക് വ്യത്യസ്ത പരിഗണനകളാണ് നൽകിയിരിക്കുന്നത്. അതിനാൽ നമുക്ക് പരിഗണനാ മാധ്യം കാണാവുന്നതാണ്. തന്നിരിക്കുന്ന പരിഗണനകൾ ഇവയാണ്.

x:	71	78	89
f:	2	3	5

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{2 \times 71 + 3 \times 78 + 5 \times 89}{2+3+5} = \frac{821}{10} = 82.1$$

b) ഒരേ പരിഗണനയാണ് നൽകുന്നതെങ്കിൽ മാധ്യം,

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{71+78+89}{3} = \frac{238}{3} = 79.33$$

സംയുക്ത മാധ്യം (COMBINED MEAN)

n_1 വിലകളുടെ മാധ്യം $\bar{x}_1$ ഉം മറ്റൊരു n_2 വിലകളുടെ മാധ്യം $\bar{x}_2$ ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അവയുടെ സംയുക്ത ഗ്രൂപ്പായ $n_1 + n_2$ വിലകളുടെ മാധ്യം ചുവടെ പറയുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

ഉദാ 1:- ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ജോലിക്കാരായ 25 പുരുഷന്മാരുടെ ശാരാശരി ഉയരം 161 സെ.മീ. യും 35 സ്ത്രീകളുടെ ശരാശരി ഉയരം 158 സെ.മീയും ആണ്. എല്ലാ ജോലിക്കാരെയും കൂടിയുള്ള ശരാശരി ഉയരം കാണുക.

ഉത്തരം

$n_1 = 25,\ \bar{x}_1 = 161, n_2 = 35,\ \bar{x}_2 = 158$

സംയുക്ത മാധ്യം, $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{25 \times 161 + 35 \times 158}{25+35} = \frac{9555}{60} = 159.25$

എല്ലാ ജോലിക്കാരെയും കൂടിയുള്ള ശരാശരി ഉയരം = 159.25 സെ.മീ.

ഉദാ 2:- ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് പരീക്ഷയിൽ 134 പെൺകുട്ടികളും 166 ആൺകുട്ടികളും പങ്കെടുക്കുന്നു. ആൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 68.5 ആണ്. ആകെ കുട്ടികളുടെ

സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 64.35 ആയാൽ പെൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

ഉത്തരം

n_1 - പെൺ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം, n_2 -ആൺ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം

$\bar{x}_1$ -പെൺ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി സ്കോർ $\bar{x}_2$ -ആൺ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി സ്കോർ

$\bar{x}$ - ആകെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി സ്കോർ

$n_1 = 134, n_2 = 166, \bar{x}_2 = 68.5,\ \bar{x} = 64.35$

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$ie,\ 64.35 = \frac{134 \times \bar{x}_1 + 166 \times 68.5}{134 + 166}$$

$$ie,\ 64.35 = \frac{134 \times \bar{x}_1 + 11371}{300}$$

$$ie,\ 64.35 \times 300 = 134 \times \bar{x}_1 + 11371$$

$$19305 = 134 \times \bar{x}_1 + 11371$$

$$134 \times \bar{x}_1 = 19305 - 11371 = 7934$$

$$\therefore \bar{x}_1 = \frac{7934}{134} = 59.21$$

പെൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം = 59.21

മധ്യാങ്കം (MEDIAN)

ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ (വിലകളെ) ആരോഹണ ക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ എഴുതുമ്പോൾ ഏറ്റവും മധ്യഭാഗത്തായി വരുന്ന വിലയാണ് മധ്യാങ്കം (മീഡിയൻ). ആ ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ മുഴുവൻ മധ്യാങ്കം രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി ഭാഗിക്കുന്നു.

മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

(i) ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ (raw data) മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു ഡാറ്റയിൽ 'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നു കരുതുക. മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് അവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതണം. അപ്പോൾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ എന്ന സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന പ്രാപ്താങ്കമായിരിക്കും മധ്യാങ്കം അഥവാ മീഡിയൻ.

ഉദാ 1: 123, 115, 98, 107, 115, 109, 113, 98, 102 എന്നിവയുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

ഉത്തരം

ഇവിടെ n = 9. മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ഈ സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതാം.

98, 98, 102, 107, 109, 113, 115, 115, 123

മധ്യാങ്കം = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ മത് വില = $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ മത് വില = 5 -)മത് വില

= 109

ഉദാ 2: 1.2, 1.4, 2.0, 1.8, 2.6, 3.2, 1.7, 2.8, 1.9, 3.5 എന്നിവയുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

ഉത്തരം

ഇവിടെ n = 10. മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ഈ സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതാം

1.2, 1.4, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0, 2.6, 2.8, 3.2, 3.5

മധ്യാങ്കം = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ മത് വില = $\left(\frac{10+1}{2}\right)$ മത് വില = 5.5 -)മത് വില

= 5, 6 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്ന വിലകളുടെ ശരാശരി.

$$= \frac{1.9+2.0}{2} = \frac{3.9}{2} = 1.95$$

(ii) ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തിപട്ടികയുടെ (**Discrete frequency table)** മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ആകെ 'N' വിലകളുണ്ടെന്നു കരുതുക. മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് പട്ടികയിലെ വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ അടുക്കിയതിനു ശേഷം സഞ്ചിതാവൃത്തിപട്ടിക തയ്യാറാക്കുക. ഈ പട്ടികയിൽ സഞ്ചിതാവൃത്തി $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ആയ വിലയാണ് മധ്യാങ്കം.

ഉദാ 1: മധ്യാങ്കം കാണുക.

വരുമാനം	:1000	1500	3000	2000	2500	1800
ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം	:24	26	16	20	6	30

ഉത്തരം

ഇവിടെ വിലകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലല്ല. അവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കിയ ശേഷം സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കണം.

വരുമാനം	ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം	സഞ്ചിതാവൃത്തി
1000	24	24
1500	26	50
1800	30	80
2000	20	100
2500	6	106
3000	16	122

N = 122. $\therefore \frac{N+1}{2} = \frac{122+1}{2} = \frac{123}{2} = 61.5$

മധ്യാങ്കം = 61.5 -)മത് വില

= 61, 62 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്ന വിലകളുടെ ശരാശരി.

$$= \frac{1800 + 1800}{2} = 1800$$

(ii) ഒരു തുടരാവൃത്തിപട്ടികയുടെ (**Continuous frequency table**) മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ആദ്യം സാഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക. ആകെ ആവൃത്തി N ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇനി $\frac{N}{2}$ എന്ന സഞ്ചിതാവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ ക്ലാസ്സിനെ മധ്യാങ്കക്ലാസ് (മീഡിയൻ ക്ലാസ്) എന്ന് പറയുന്നു. ചുവടെ കാണുന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് മധ്യാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\text{മധ്യാങ്കം} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$$

ഇതിൽ, l – മധ്യാങ്കക്ലാസ്സിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി

c – മധ്യാങ്കക്ലാസ്സിന്റെ അന്തരം

f – മധ്യാങ്കക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തി

m – മധ്യാങ്കക്ലാസ്സിന്റെ മുൻപിലുള്ള ക്ലാസ്സിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തി

കുറിപ്പ് : തന്നിരിക്കുന്ന ചോദ്യത്തിലെ ക്ലാസുകൾ ഉൾച്ചേർക്കൽ (inclusive) ക്ലാസ്സുകളാണെങ്കിൽ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിനുമുമ്പ് അവയെ കേവല (Exclusive) ക്ലാസ്സുകളാക്കണം.

ഉദാ 1:- താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

വേതനം	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	3	5	20	10	5

ഉത്തരം

ആദ്യം നമുക്ക് സഞ്ചിതാവൃത്തിപട്ടിക കാണണം.

ക്ലാസ്സ്	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
200-300	3	3
300-400	5	8
400-500	20	28
500-600	10	38
600-700	5	43
ആകെ	N = 43	

$$\frac{N}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$$

അതായത് സഞ്ചിതാവൃത്തി 21.5 ആയ ക്ലാസ്സാണ് മധ്യാങ്കക്ലാസ്സ്. അപ്പോൾ ഇവിടുത്തെ

$$\therefore l = 400, c = 100, f = 20, m = 8$$

മധ്യാങ്കക്ലാസ്സ് 400 - 500 ആണ്.

മധ്യാങ്കം $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$

$$= 400 + \frac{(21.5 - 8) \times 100}{20} = 400 + \frac{13.5 \times 100}{20} = 400 + \frac{1350}{20}$$

$$= 400 + 67.5 = \underline{\underline{467.5}}$$

ഉദാ 2:- 45 മുൻസിപ്പൽ കോർപറേഷനുകളുടെ ചെലവിനെ സംബന്ധിക്കുന്ന വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

ക്ലാസ്സ്	10-20	21-31	32-42	43-53	54-64	65-75
ആവൃത്തി	2	8	15	7	10	3

ഉത്തരം

ഇവിടെ ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസ്സുകളാണുള്ളത്. അവയെ കേവല ക്ലാസ്സുകളാക്കിയിട്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തിപട്ടികയുണ്ടാക്കണം.

ക്ലാസ്സ്	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
9.5-20.5	2	2
20.5-31.5	8	10
31.5-42.5	15	25
42.5-53.5	7	32
53.4-64.5	10	42
64.5-75.5	3	45
Total	N = 45	

$\frac{N}{2} = \frac{45}{2} = 22.5.$

അതുകൊണ്ട് മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് = 31.5 - 42.5.

$\therefore l = 31.5, c = 11, f = 15, m = 10$

മധ്യാങ്കം $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$

$$= 31.5 + \frac{(22.5 - 10) \times 11}{15} = 31.5 + \frac{12.5 \times 11}{15} = 31.5 + \frac{137.5}{15}$$

$$= 31.5 + 9.17 = \underline{\underline{40.67}}$$

ഉദാ 3:- താഴെ പറയുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം 86 ആയാൽ വിട്ടുപോയ ആവൃത്തി കണ്ടുപിടിക്കുക.

ക്ലാസ്സ്	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110
ആവൃത്തി	2	1	6	6	*f*	12	5

ഉത്തരം

മധ്യാങ്കം 86 എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു അതിനാൽ മാധ്യക ക്ലാസ്സ് 80 - 90 ആണ്.

$\therefore l = 80, c = 10, f = f, m = 15$

മധ്യാങ്കം $= l + \dfrac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$

$$ie,\ 80 + \frac{\left(\frac{32+f}{2} - 15\right)10}{f} = 86 \quad \Rightarrow \left(\frac{32+f}{2} - 15\right) \times 10 = (86-80)f = 6f$$

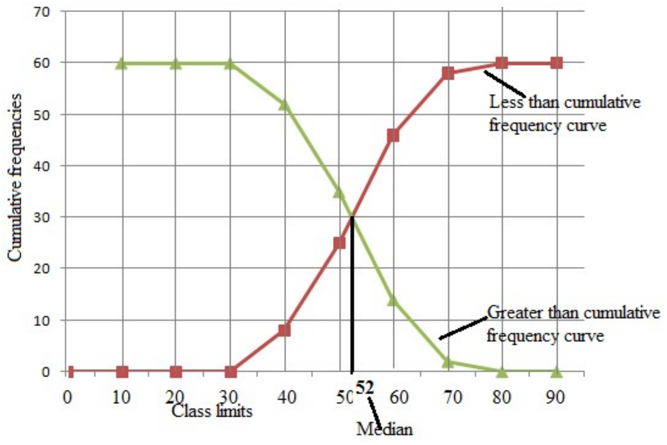
$$\Rightarrow \left(\frac{32+f-30}{2}\right) \times 10 = 6f \qquad \Rightarrow (2+f) \times 5 = 6f$$

$$\Rightarrow 10 + 5f = 6f \qquad \Rightarrow 6f - 5f = 10 \qquad \Rightarrow f = 10$$

വിട്ടുപോയ ആവൃത്തി = 10

കുറിപ്പ്:- 1. ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ കേവലവില പൂജ്യം ആകുന്നത് വ്യതിയാനങ്ങൾ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുമെടുക്കുമ്പോൾ ആണ്.

2. ഒജൈവുകളുടെ സഹായത്താൽ മധ്യാങ്കത്തെ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് കാണാവുന്നതാണ്. അതിനായി രണ്ട് ഒജൈവുകളെയും ഒരേ ഗ്രാഫിൽ വരക്കുക. അവതമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x നിർദ്ദേശാങ്കമായിരിക്കും മധ്യാങ്കം.



മോഡ് (MODE)

ഒരു ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം അവർത്തിച്ചുവരുന്ന പ്രാപ്താങ്കമാണ് മോഡ്.

മോഡ് കണക്കാക്കുന്ന വിധം

(i) ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ (raw data) മോഡ് കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം അവർത്തിച്ചിരിക്കുന്ന വിലയാണ് അതിന്റെ മോഡ് .

ഉദാ :- ഒരു ദിവസം ഒരു കടയിൽ വിറ്റ 15 ചെരുപ്പുകളുടെ അളവുകളാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

5,7,9,9,8,5,6,8,7,7,7,9,2,7. മോഡ് കാണുക.

ഉത്തരം

ഇവിടെ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം വന്നിരിക്കുന്നത് 7 എന്ന അളവാണ്. അതിനാൽ മോഡ് 7 ആയിരിക്കും.

(ii) ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തിപട്ടികയുടെ (Discrete frequency table) മോഡ് കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി ഉള്ള വിലയാണ് അതിന്റെ മോഡ്.

ഉദാ:- താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ചെരുപ്പളവ്:	2	3	4	5	6
ആവൃത്തി:	8	15	23	20	14

ഉത്തരം

ഇവിടെ ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള അളവ് 4 ആണ്. അതിനാൽ മോഡ് = 4

(iii) ഒരു തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ (Discrete frequency table) മോഡ് കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ആദ്യമായി ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി ഉള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുന്നു. ഈ ക്ലാസ്സിനെ മോഡൽ ക്ലാസ് എന്ന് വിളിക്കാം. മോഡ് കാണുന്നതിന് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\text{മോഡ്} = l + \frac{(f_1 - f_0)c}{(f_1 - f_0)(f_1 - f_2)}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$\text{മോഡ്} = l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

ഇവിടെ l – മോഡൽ ക്ലാസ്സിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി

c – മോഡൽ ക്ലാസ്സിന്റെ അന്തരം

f_0 – മോഡൽ ക്ലാസ്സിന്റെ തൊട്ട് മുന്നിലെ ക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തി

f_1 – മോഡൽ ക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തി

f_2 – മോഡൽ ക്ലാസ്സിന്റെ തൊട്ട് ശേഷമുള്ള ക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തി

ഉദാ 1:- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

വയസ്സ്	14-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ആവൃത്തി	12	14	26	35	23	5

ഉത്തരം

ഇവിടെ ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി 35 ആണ്. അതുകൊണ്ട് മോഡൽ ക്ലാസ് 40 - 50 ആണ്.

മോഡ് $= l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$ ഇവിടെ $l = 40, c = 10, f_0 = 26, f_1 = 35, f_2 = 23$

$$= 40 + \frac{(35-26)\times 10}{2\times 35 - 26 - 23} \quad = 40 + \frac{9\times 10}{70-49}$$

$$= 40 + \frac{90}{21} \quad = 40 + 4.29 \quad = \underline{\underline{44.29}}$$

മോഡ് = 44.29

ഉദാ 2:- മോഡ് കാണുക

വയസ്സ്	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ആവൃത്തി	20	24	32	28	20	26

ഉത്തരം

ഇവിടെ ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസ്സുകളാണുള്ളത്. അവയെ കേവല ക്ലാസ്സുകളാക്കിയിട്ട് മോഡ് കാണാം. ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി 32 ആണ്. അതുകൊണ്ട് മോഡൽ ക്ലാസ് 29.5 - 34.5 ആണ്

മോഡ് $= l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$ ഇവിടെ $l = 29.5, c = 5, f_0 = 24, f_1 = 32, f_2 = 28$

$$= 29.5 + \frac{(32-24)\times 5}{2\times 32 - 24 - 28} \quad = 29.5 + \frac{8\times 5}{64-52}$$

$$= 29.5 + \frac{40}{12} \quad = 29.5 + 3.33 = \underline{\underline{32.83}}$$

മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

അനുഭവങ്ങളിൽ നിന്നും മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും തമ്മിൽ ചുവടെ പറയുന്ന ഒരു ബന്ധം ഉള്ളതായി മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

മാധ്യം - മോഡ് = 3(മാധ്യം - മധ്യാങ്കം)

അല്ലെങ്കിൽ

മോഡ് = 3 മധ്യാങ്കം - 2 മാധ്യം

ഉദാ:- ഒരു കൂട്ടം വിളകൾക്ക് മോഡ് മാധ്യത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. ഇതിന്റെ മധ്യാങ്കം 23 ആണെങ്കിൽ മാധ്യവും മോഡും കാണുക.

ഉത്തരം

മധ്യാങ്കം = 23 എന്നും മോഡ് = 2 മാധ്യം എന്നും തന്നിരിക്കുന്നു.

നമുക്കറിയാം

മാധ്യം - മോഡ് = 3(മാധ്യം - മധ്യാങ്കം)

അതായത്, മാധ്യം - 2 മാധ്യം = 3 (മാധ്യം - 23)

- മാധ്യം = 3 മാധ്യം - 69

69 = 3 മാധ്യം + മാധ്യം = 4മാധ്യം

മാധ്യം = 69/ 4 = 17.25

മോഡ് = 2 x 17.25 = 34.5

ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GEOMETRIC MEAN - GM)

'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ n)മത്തെ മൂലം എടുത്താൽ മതി.

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} = \left(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n\right)^{1/n}$$

കുറിപ്പ്; 1. അനുപാതങ്ങൾ വർധന ശതമാനം, കുറയൽ ശതമാനം എന്നിവയുടെയൊക്കെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് GM ഉപയോഗിക്കാം,.

2. സൂചികകൾ (Index Numbers) കാണുന്നതിന് ഏറ്റവും മികച്ച ശരാശരി GM ആണ്.

3. ചില വിലകൾ നെഗറ്റീവ് ആയാൽ GM കാണാൻ കഴിയില്ല.

4' ഒന്നോ അതിലധികമോ വിലകൾ പൂജ്യം ആയാൽ GM കാണുന്നത് അർത്ഥരഹിതമാകും .

ഉദാ:- 4.2, 16.8 എന്നിവയുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം കാണുക.

ഉത്തരം

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} = \sqrt[2]{4.2 \times 16.8} = \sqrt[2]{70.56} = 8.4$$

സന്തുലിത മാധ്യം (HARMONIC MEAN - HM)

ഒരു കൂട്ടം വിലകളുടെ സന്തുലിത മാധ്യം എന്നത് അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ്.

$$\frac{1}{HM} = \frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{x}\right)$$

OR

$$HM = \frac{n}{\left(\sum \frac{1}{x}\right)}$$

കുറിപ്പ് : 1. വേഗതയുടെ ശരാശരി നിബന്ധനകൾക്കനുസരിച്ച് കാണുന്നതിന് HM ഉപയോഗിക്കാം.

2. ഡാറ്റയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വില പൂജ്യം ആയാൽ HM കാണാൻ സാധിക്കില്ല.

ഉദാ:- ഒരു വിമാനം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാല് വശങ്ങളിൽ കൂടി യഥാക്രമം 100, 200, 300, 400 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത കാണുക.

ഉത്തരം

ശരാശരി വേഗത എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന വേഗതകളുടെ HM ആണ്.

$$\frac{1}{HM} = \frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0.01+0.005+0.0033+0.0025\right) = \frac{0.0208}{4}$$

$$\therefore HM = \frac{4}{0.0208} = \underline{\underline{192.3}}$$

ശരാശരി വേഗത = 192.3 കി.മീ/മണിക്കൂർ

AM, GM, HM ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

1. രണ്ട് വിലകൾക്ക് $(GM)^2 = AM \times HM \text{ or } GM = \sqrt{AM \times HM}$

2. n പോസിറ്റീവ് വിലകൾക്ക് $AM \geq GM \geq HM$

ഉദാ:- രണ്ട് വിലകളുടെ AM 10 ഉം HM 8.1 ഉം ആയാൽ GM കാണുക.

ഉത്തരം

GM = $\sqrt{AM \times HM} = \sqrt{10 \times 8.1} = \sqrt{81} = 9$

വിഭജന വിലകൾ (PARTITION VALUES)

ഒരു ഡാറ്റയെ പല തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിളകളെയാണ് വിഭജന വിലകൾ എന്ന് പറയുന്നത്. ഉദാഹരണം - ചതുരംശങ്ങൾ, ദശാംശങ്ങൾ, ശതാംശങ്ങൾ.

ചതുരംശങ്ങൾ (QUARTILES)

ചതുരംശങ്ങൾ ഒരു ഡാറ്റയെ 4 തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ചതുരംശങ്ങൾ 3 എണ്ണമുണ്ട്. ഇവയെ Q_1, Q_2, Q_3 എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

Q_1 എന്നത് ഒന്നാമത്തെ ചതുരംശമാണ്. ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ 25% Q_1 ന് താഴെയും 75% Q_1 ന് മുകളിലും ആണ്.

Q_2 എന്നത് രണ്ടാമത്തെ ചതുരംശമാണ്. ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ 50% Q_2 ന് താഴെയും 50% Q_2 ന് മുകളിലും ആണ്. അതായത് Q_2 എന്നത് മധ്യാങ്കമാണ്

Q_3_എന്നത് മൂന്നാമത്തെ ചതുരംശമാണ്. ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ 75% Q_3 ക്ക് താഴെയും 25% Q_3 ക്ക് മുകളിലും ആണ്.

ചതുരംശങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്ന വിധം (CALCULATION OF QUARTILES)

(i) ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ (raw data) ചതുരംശങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിൽ n വിളകളുണ്ടെന്ന് കരുതുക. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് അവയെ ആദ്യം ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതണം.

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ എന്ന സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന പ്രാപ്താങ്കത്തിന്റെ വില

$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ എന്ന സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന പ്രാപ്താങ്കത്തിന്റെ വില

ഉദാ:- ചുവടെ തരുന്നത് 9 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു ക്ലാസ് ടെസ്റ്റിൽ ലഭിച്ച സ്കോറുകളാണ്. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

38, 7, 43, 25, 20, 15, 12, 18, 11.

ഉത്തരം

വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കിയാൽ

7, 11, 12, 15, 18, 20, 25, 38, 43

വിലകളുടെ എണ്ണം, $n = 9$

$\frac{n+1}{4} = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$

Q_1 = 2.5 -)മത്തെ വില

= 2, 3 എന്നീ സ്ഥാനത്തെ വിലകളുടെ ശരാശരി

$= \frac{11+12}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$

$\frac{3(n+1)}{4} = 3 \times 2.5 = 7.5$

Q_3 = 7.5 -)മത്തെ വില

= 7, 8 എന്നീ സ്ഥാനത്തെ വിലകളുടെ ശരാശരി

$= \frac{25+38}{2} = \frac{63}{2} = 31.5$

(ii) ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ (discrete distribution) ചതുരംശങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്ന വിധം

വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ ആകെ ആവൃത്തി N ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ആദ്യം സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണണം.

Q_1 = സഞ്ചിതാവൃത്തി $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ആയ പ്രാപ്താങ്കം

Q_3 = സഞ്ചിതാവൃത്തി $\left(\frac{3(N+1)}{4}\right)$ ആയ പ്രാപ്താങ്കം

ഉദാ:- ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

മാർക്ക്	: 20	30	40	50	60
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	: 4	16	20	18	11

ഉത്തരം

മാർക്ക്	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
20	4	4
30	16	20
40	20	40
50	18	58
60	11	69
ആകെ	N = 69	

$$\frac{N+1}{4} = \frac{69+1}{4} = \frac{70}{4} = 17.5$$

Q_1 = സഞ്ചിതാവൃത്തി 17.5 ആയ പ്രാപ്താങ്കം

= 17, 18 എന്നീ സ്ഥാനത്തെ വിലകളുടെ ശരാശരി

$$= \frac{30+30}{2} = 30$$

$$\frac{3(N+1)}{4} = 3 \times 17.5 = 52.5$$

Q_3 = സഞ്ചിതാവൃത്തി 52.5 ആയ പ്രാപ്താങ്കം

= 52, 53 എന്നീ സ്ഥാനത്തെ വിലകളുടെ ശരാശരി

$$= \frac{50+50}{2} = 50$$

(iii) ഒരു തുടരാവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ **(continuous distribution)** ചതുരംശങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്ന വിധം

ഒരു തുടരാവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ആദ്യം സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കണം. ആകെ ആവൃത്തി N ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അടുത്തതായി $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$ എന്നിങ്ങനെ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ ഉള്ള ക്ലാസുകൾ കണ്ടെത്തുക. ഈ ക്ലാസ്സുകളെ ചതുരംശക്ലാസ്സുകൾ എന്ന് പറയുന്നു. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിനുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)c_1}{f_1}$$

ഇവിടെ
l_1 – ഒന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി
c_1 – ഒന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന്റെ ക്ലാസ്സന്തരം
f_1 – ഒന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തി
m_1 – ഒന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന് തൊട്ട് മുൻപുള്ള ക്ലാസ്സിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തി

കൂടാതെ

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)c_3}{f_3}$$

ഇവിടെ
l_3 – മൂന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി
c_3 – മൂന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന്റെ ക്ലാസ്സന്തരം
f_3 – മൂന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തി
m_3 – മൂന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സിന് തൊട്ട് മുൻപുള്ള ക്ലാസ്സിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തി

ഉദാ:- ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	5	7	8	12	28	22	10	8

ഉത്തരം

ആദ്യം സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കണം.

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	5	7	8	12	28	22	10	8
സഞ്ചിതാവൃത്തി	5	12	20	32	60	82	92	100

ആവൃത്തി N = 100

$$\therefore \frac{N}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

ഒന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സ് - 30-40

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)c_1}{f_1}$$

ഇവിടെ, $l_1 = 30, c_1 = 10, f_1 = 12, m_1 = 20$

$$Q_1 = 30 + \frac{(25-20)10}{12}$$

$$= 30 + \frac{5 \times 10}{12} = 30 + 4.17 = \underline{\underline{34.17}}$$

$$\frac{3N}{4} = 3 \times 25 = 75$$

മൂന്നാം ചതുരംശക്ലാസ്സ് - 50-60

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)c_3}{f_3}$$

ഇവിടെ, $l_3 = 50, c_3 = 10, f_3 = 22, m_3 = 60$

$$Q_1 = 50 + \frac{(75-60)10}{22}$$

$$= 50 + \frac{15 \times 10}{22} = 50 + 6.82 = \underline{\underline{56.82}}$$

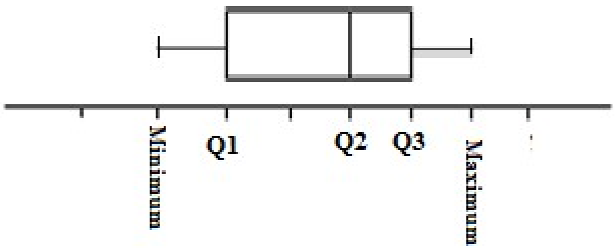
ദശാംശങ്ങളും ശതാംശങ്ങളും (Deciles and Percentiles)

ഒരു ഡാറ്റയെ 10 തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളാണ് ദശാംശങ്ങൾ. ഇവ 9 എണ്ണം ഉണ്ട്. ഇതിൽ അഞ്ചാമത്തെ ദശാംശമാണ് മധ്യാങ്കം.

ശതാംശങ്ങൾ ഒരു ഡാറ്റയെ 100 തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. ആകെ 99 ശതാംശങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ അമ്പതാമത്തെ ശതാംശമാണ് മധ്യാങ്കം.

ബോക്സ് പ്ലോട്ട് (BOX PLOT)

ഒരു ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വില, ഏറ്റവും വലിയ വില, ആ ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ ഉപയോഗിച്ച് ഡാറ്റയെ ഗ്രാഫുരൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുന്നതാണ് ബോക്സ് പ്ലോട്ട്. ഇതിനെ വിസ്കർ പ്ലോട്ട് എന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്. ബോക്സ് പ്ലോട്ടിന്റെ ആകൃതി ചുവടെ കാണുന്നതാണ്.



ഉദാ:- ചുവടെ തരുന്ന ഡാറ്റയുടെ ബോക്സ് പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുക.

13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20

ഉത്തരം

ബോക്സ് പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുന്നതിന് ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വില, ഏറ്റവും വലിയ വില, ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ കാണണം. അതിനായി വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതണം.

6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21

n = 12

ഏറ്റവും ചെറിയ വില = 6 ഏറ്റവും വലിയ വില = 21

$$\frac{n+1}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

Q_1 = 3.25 മത് വില

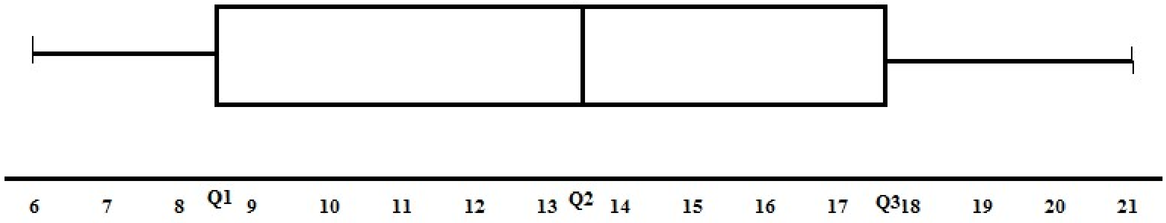
$$= 8 + 0.25(10-8)$$
$$= 8 + 0.25 \times 2$$
$$= 8 + 0.5 = 8.5$$

$$\frac{n+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Q_2 = 6.5 മത് വില

$$= \frac{13+14}{2}$$
$$= 13.5$$

$$\frac{3(n+1)}{4} = 3 \times 3.25 = 9.75$$

Q_3 = 9.75 മത് വില

$$= 17 + 0.75(18-17)$$
$$= 17 + 0.75 \times 1$$
$$= 17 + 0.75 = 17.75$$