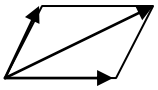
مراجعة سريعة لأهم أفكار الجزء الثاني من منهاج الرياضيات للثالث الثانوي العلمي

الوحدة الأولى : الأشعة في الفراغ

- **علاقة شال** (مجموع أشعة متتالية): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- **علاقة متوازي الأضلاع** (مجموع شعاعين لهما المبدأ ذاته): هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين.



- **الارتباط الخطي لشعاعين:** نقول عن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطين خطياً إذا وجد عدد حقيقي k يحقق: $\vec{u}=k\vec{v}$.
- **يفيد الارتباط الخطي لشعاعين في:**
  1. إثبات توازي مستقيمين (إذا كان الشعاعين مؤلفين من أربع نقاط).
  2. إثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة (إذا كان الشعاعين مؤلفين من ثلاث نقاط).
- **الارتباط الخطي لثلاث أشعة:** نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا تحقق أحد الشروط التالية:
  1. إذا كان شعاعين من الأشعة الثلاثة مرتبطين خطياً ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مثلاً) فإن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.
  2. إذا لم يكن شعاعين مرتبطين خطياً ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مثلاً) نبحث عن عددين حقيقيين α و β بحيث $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.
- **يفيد الارتباط الخطي لثلاث أشعة في:**
  1. إثبات أن أربع نقاط في مستوٍ واحد.
  2. إثبات أن مستقيم يوازي مستوٍ.
- **الهندسة التحليلية في الفراغ:**
  1. مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تعطى بالشكل: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$.
  2. طول القطعة المستقيمة $[AB]$ يعطى بالشكل: $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.
  3. منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ يعطى بالشكل: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ و $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
  4. مركز ثقل المثلث ABC يعطى بالشكل:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} \text{ و } z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}.$$

  5. الارتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ و $\vec{v}\left(a',b',c'\right)$ يحقق: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$.
  6. إحداثيات رؤوس مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه a في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ حيث $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=a\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=a\vec{k}$ تعطى بالشكل:

$$A\left(0,0,0\right) \text{ و } B\left(a.0.0\right) \text{ و } C\left(a,a,0\right) \text{ و } D\left(0,a,0\right) \text{ و } E\left(0,0,a\right) \text{ و } F\left(a,0,a\right) \text{ و } G\left(a,a,a\right) \text{ و } H\left(0,a,a\right)$$

  7. إحداثيات رؤوس مكعب $ABCDEFGH$ في المعلم $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ تعطى بالشكل:

$$A\left(0,0,0\right) \text{ و } B\left(1.0.0\right) \text{ و } C\left(1,1,0\right) \text{ و } D\left(0,1,0\right) \text{ و } E\left(0,0,1\right) \text{ و } F\left(1,0,1\right) \text{ و } G\left(1,1,1\right) \text{ و } H\left(0,1,1\right)$$

- **معادلة كرة:**

1. مركزها A ونصف قطرها R تعطى بالشكل: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$.
2. مركزها A وتمر بالنقطة B تعطى بالشكل: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=AB^2$ حيث $R=AB$.

- **مركز الأبعاد المتناسبة:**

1. مركز الأبعاد للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) هو النقطة G التي تحقق: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
2. إذا كانت M نقطة كيفية من الفراغ فإن: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.
3. الخاصة التجميعية: إذا كان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) فإن:
   G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(H,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

- **يفيد مركز الأبعاد المتناسبة في:**

1. إثبات أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة (إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المتبقيتين).
2. إثبات أن أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد (إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط المتبقية).

- **معادلة اسطوانة:**

تعطى معادلة الاسطوانة التي محورها OZ ومركز قاعدتيها $O_1(0,0,a)$ و $O_2(0,0,b)$ ونصف قطر قاعدتها c بالشكل:

$$a\le z\le b \text{ و } x^2+y^2=c^2$$

- **معادلة المخروط:**

تعطى معادلة المخروط الذي محوره OZ ومركز قاعدته $O_2(0,0,b)$ ورأسه $O_1(0,0,a)$ ونصف قطر قاعدته c بالشكل:

$$a\le z\le b \text{ و } x^2+y^2-\frac{c^2}{(b-a)^2}z^2=0$$

الرياضيات مع أيهم الشاعر

- **إيجاد مجموعة النقاط M التي تحقق:**

1. $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.
2. $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$ تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $R=[AB]$.

انتهت الوحدة الأولى

الوحدة الثانية : الجداء السلمي في الفراغ

- **علاقات الجداء السلمي:** تعطى علاقات الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالشكل:

1. $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$.
2. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$.
3. $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
4. المسقط القائم: إذا كان C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم AB فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.

- **حالة خاصة:**

1. إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً وفي جهة واحدة فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.
2. إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً وفي جهتين مختلفتين فإن: $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

- **يفيد الجداء السلمي لشعاعين في:**

1. إثبات تعامد مستقيمين (إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$).
2. إيجاد جيب تمام زاوية (cos) من العلاقة $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$.

- **إيجاد معادلة مستوٍ:**

1. معادلة مستوي مار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}(a,b,c)$ بالشكل $ax + by + cz + d = 0$ وبإيجاد d نعوض A.
2. معادلة مستوي مار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}(a,b,c)$ (طريقة ثانية) هو مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\vec{n} = 0$.
3. معادلة مستوي مار بثلاث نقاط A و B و C وفق الخطوات التالية:
   a. نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي فيحقق العلاقتين $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$.
   b. نعطي أي قيمة لـ a فنحصل على معادلتين بمجهولين b و c بحلهما نحصل على الناظم $\vec{n}(a,b,c)$.
   c. تصبح معادلة المستوي بالشكل $ax + by + cz + d = 0$ وبإيجاد d نعوض A.

- **بعد نقطة عن مستوي:**

تعطى علاقة بعد النقطة A عن المستوي $P: ax + by + cz + d = 0$ بالشكل $dist(A,P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

- **الوضع النسبي لمستويين:**

1. نقول عن مستويين أنهما متوازيين إذا كان الناظمين مرتبطين خطياً.
2. نقول عن مستويين أنهما متعامدين إذا كان الجداء السلمي للناظمين مساوياً الصفر.
3. نقول عن مستويين أنهما متقاطعين إذا كان الناظمين غير مرتبطين خطياً (انتبه تعامد مستويين حالة خاصة من التقاطع)

- **ملاحظة هامة جداً:**

لا تستخدم معلماً غير متجانس عند تطبيق الجداء السلمي أو عند حساب المسافات.

- **المسقط القائم لنقطة على مستقيم:** لإيجاد إحداثيات C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم AB نتبع الخطوات التالية:

1. الشعاعين $\overrightarrow{CC'}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدين ومنه $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}=0$ (نحصل على معادلة بدلالة x و y و z).
2. الشعاعين $\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً ومنه: $\overrightarrow{AC'}=k\overrightarrow{AB}$ وبالتالي نحصل على x و y و z بدلالة k وفق:

$$\overrightarrow{AC'}=k\overrightarrow{AB}$$
$$(x-x_A,y-y_A,z-z_A)=k(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$z=\gamma k+z_A \text{ و } y=\beta k+y_A \text{ و } x=\alpha k+x_A$$

3. نعوض العلاقات السابقة في المعادلة التي حصلنا عليها في الطلب الأول فنحصل على قيمة k.
4. نعوض قيمة k في العلاقات التي حصلنا عليها في الطلب الثاني فنحصل على إحداثيات C'.

- **المسقط القائم لنقطة على مستوي:** لإيجاد إحداثيات C' المسقط القائم للنقطة C على المستوي P نتبع الخطوات التالية:

1. C' نقطة من المستوي P فهي تحقق معادلته $P: ax+by+cz+d=0$.
2. الشعاعين $\overrightarrow{CC'}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً ومنه: $\overrightarrow{CC'}=k\vec{n}$ وبالتالي نحصل على x و y و z بدلالة k وفق:

$$\overrightarrow{CC'}=k\vec{n}$$
$$(x-x_C,y-y_C,z-z_C)=k(a,b,c)$$
$$z=ck+z_C \text{ و } y=bk+y_C \text{ و } x=ak+x_C$$

3. نعوض العلاقات السابقة في معادلة المستوي P فنحصل على قيمة k.
4. نعوض قيمة k في العلاقات التي حصلنا عليها في الطلب الثاني فنحصل على إحداثيات C'.

- **المسقط القائم لنقطة على الفصل المشترك لتقاطع مستويين:** لإيجاد إحداثيات C' المسقط القائم للنقطة C على الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q نتبع الخطوات التالية:

1. نوجد نقطتين A و B من الفصل المشترك (بإعطاء أي قيمة لـ x ثم نحصل على معادلتين بمجهولين بحلهما نحصل على نقطة).
2. تؤول المسألة لإيجاد C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم AB (كما ورد سابقاً).

انتهت الوحدة الثانية

- **طريقة غاوس لحل جملة ثلاث معادلات خطية:** لحل جملة المعادلات الخطية $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{pmatrix}$ نتبع الخطوات التالية:

1. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية نحذف x من المعادلة الثانية لتصبح $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{pmatrix}$.
2. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثالثة نحذف x من المعادلة الثالثة لتصبح $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ b_3'y+c_3'z=d_3' \end{pmatrix}$.
3. بالحل المشترك للمعادلتين الثانية والثالثة نحذف y من المعادلة الثالثة لتصبح $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ c_3''z=d_3'' \end{pmatrix}$.
4. ونميز الحالات التالية:
   a. إذا كانت المعادلة الثالثة من الشكل $c_3''z=d_3''$ نوجد قيمة z ثم نعوض في المعادلة الثانية لنحسب قيمة y ثم نعوض في المعادلة الأولى لنحصل على قيمة x فيكون حل الجملة (x,y,z).
   b. إذا كانت المعادلة الثالثة من الشكل $\alpha=\alpha$ (محققة دوماً) فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.
   c. إذا كانت المعادلة الثالثة من الشكل $\alpha=\beta$ (غير محققة) فإنه ليس للجملة حل.

- **المستقيم والمستوي بصفتها مراكز أبعاد متناسبة:**

1. المستقيم AB هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,t) و $(B,1-t)$.
2. المستوي ABC هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (A,y).

- **التمثيل الوسيطي لمستقيم:**

1. معلوم منه نقطة A وشعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$ يعطى بالشكل: $d:\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases} :t\in\mathbb{R}$.
2. معلوم منه نقطتين A و B يعطى بالشكل: $d:\begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_A \\ y=(y_B-y_A)t+y_A \\ z=(z_B-z_A)t+z_A \end{cases} :t\in\mathbb{R}$.

- **التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لتقاطع مستويين**: ليكن d الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q ولإيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم d نتبع الخطوات التالية:
  1. نفرض $x = t$ ونعوضها في معادلتي المستويين فنحصل على معادلتين بمجهولين y و z.
  2. بالحل المشترك للمعادلتين السابقتين نحصل على قيمة كل من y و z بدلالة t ومنه يكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d.
- **الوضع النسبي لمستقيمين**: لدراسة الوضع النسبي للمستقيمين d و d' نميز الحالات التالية:
  1. إذا كان شعاعي توجيه المستقيمين مرتبطين خطياً فالمستقيمين إما متوازيين أو منطبقين ، و لتحديد توازي أو تطابق مستقيمين: نختار نقطة من d ونعوضها في d' إذا كانت محققة فالمستقيمين منطبقين وإذا كانت غير محققة فالمستقيمين متوازيين.
  2. إذا كان شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطياً فالمستقيمين إما متقاطعين أو متخالفين ، ولتحديد تقاطع أو تخالف مستقيمين: بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين إذا كان لها حل فالمستقيمين مقاطعين وهذا الحل هو نقطة التقاطع أما إذا لم يكن لها حل فالمستويين متخالفين.
- **الوضع النسبي لمستقيم ومستوي**: لدراسة الوضع النسبي للمستقيم d والمستوي P نميز الحالات التالية:
  1. إذا كان شعاع توجيه المستقيم وناظم المستوي مرتبطين خطياً فالمستقيم عمودي على المستوي.
  2. إذا كان شعاع توجيه المستقيم وناظم المستوي متعامدين فالمستقيم يوازي المستوي.
  3. إذا كان شعاع توجيه المستقيم وناظم المستوي غير متعامدين فالمستقيم يقطع المستوي.
- **نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي**: لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P نتبع الخطوات التالية:
  1. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي P فنحصل على قيمة t.
  2. نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم d نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع.
- **الوضع النسبي لثلاث مستويات**: لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات ، نحل جملة معادلات المستويات بطريقة غاوس مثلاً ونميز الحالات:
  1. إذا كان للجملة حل وحيد فالمستويات تتقاطع في نقطة وحيد وهي الحل المشترك.
  2. إذا لم يكن للجملة حل فالمستويات غير متقاطعة.
  3. إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول فالمستويات تتقاطع بفصل مشترك.

انتهت الوحدة الثالثة

الوحدة الرابعة : الأعداد العقدية

- **مجموعة الأعداد العقدية:** $\mathbb{C}$ وتحقق $\sqrt{-1}=i$ ومنه $i^2=-1$.
- **الشكل الجبري للعدد العقدي:** $z=x+iy$ حيث $x=\mathrm{Re}(z)$ القسم الحقيقي ، $y=\mathrm{Im}(z)$ القسم التخيلي.
- **طويلة العدد العقدي:** $z=x+iy \quad \Rightarrow \quad |z|=\sqrt{x^2+y^2}$.
- **مرافق العدد العقدي:** $z=x+iy \quad \Rightarrow \quad \bar{z}=x-iy$.
- **العمليات على العدد العقدي:** ليكن لدينا العددان العقديان $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$:
  1. الجمع: $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$ ، (شكل جبري).
  2. الطرح: $z_1-z_2=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)$ ، (شكل جبري).
  3. الجداء: $z_1.z_2=(x_1+iy_1).(x_2+iy_2)$ ، (شكل جبري).
  4. القسمة: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$ ، (ليس شكل جبري). للكتابة بالشكل الجبري يصبح: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\times\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}$.
- **العدد العقدي الممثل لنقطة:** العدد العقدي الممثل للنقطة $M(x,y)$ هو $z=x+iy$.
- **عكس العدد العقدي:** عكس العدد العقدي $z=x+iy$ هو العدد العقدي $-z=-x-iy$.
- **الشكل المثلثي للعدد العقدي:** الشكل المثلثي للعدد العقدي $z=x+iy$ يعطى بالشكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ و } \cos\theta=\frac{x}{r} \text{ و } \sin\theta=\frac{y}{r} \Rightarrow \arg(z)=\theta$$

- **خواص طويلة عدد عقدي وزاويته:** ليكن العددان العقديان z و z' ونميز الحالتين:
  1. جداء عددين عقديين $z.z'$: $|z.z'|=|z|.|z'|$ و $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$.
  2. قسمة عددين عقديين $\frac{z}{z'}$: $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ و $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.
- **الشكل الأسي للعدد العقدي:** الشكل الأسي للعدد العقدي $z=x+iy$ يعطى بالشكل $z=re^{i\theta}$.
- **العلاقة بين الشكل الأسي والمثلثي:** $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.
- **دستور دوموافر:**
  1. الشكل المثلثي: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$
  2. الشكل الأسي: $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.
- **علاقتا أويلر:** $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

- **المعادلة من الدرجة الثانية بأمثال حقيقية:** لحل المعادلة $az^2+bz+c=0$ نوجد المميز $\Delta=b^2-4ac$ ونميز الحالات التالية:

1. $\Delta>0$ للمعادلة حلين مختلفين: $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. $\Delta<0$ للمعادلة حلين مختلفين: $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
3. $\Delta=0$ للمعادلة حل وحيد: $z_0=\dfrac{-b}{2a}$.

- **الجذور التربيعية لعدد عقدي:** الجذر التربيعي للعدد العقدي $\omega=a+ib$ هو العدد العقدي $z=x+iy$ الذي يحقق:

$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$ بحل جملة المعادلات نوجد على x و y ومنه نحصل على $z=x+iy$.

- **المعادلة من الدرجة الثانية بأمثال غير حقيقية:** لحل مثل هذه المعادلات نتبع الخطوات التالية:

1. نوجد المميز $\Delta=b^2-4ac$.
2. نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي Δ ولتكن $\sqrt{\Delta}=\pm x\pm iy$.
3. ومنه تكون الحلول $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

انتهت الوحدة الرابعة

الرياضيات مع أيهم الشاعر

الوحدة الخامسة : تطبيقات الأعداد العقدية

جميع العلاقات التالية في المستوي العقدي $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$:

- **تمثيل الأشعة بعدد عقدي:** العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$.
- **المسافة:** طول القطعة المستقيمة $[AB]$ في المستوي العقدي يعطى بالعلاقة $AB=\left|z_B-z_A\right|$.
- **العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة:** I منتصف $[AB]$ فإن $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
- **العدد العقدي الممثل مركز ثقل مثلث:** G مركز ثقل المثلث ABC فإن $z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$.
- **العدد العقدي الممثل لمركز أبعاد متناسبة:** G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإن:

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

- **الزاوية بين شعاعين:** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$.
- **تمثيل بعض المجموعات الخاصة:** لتكن لدينا النقاط $A(a)$ و $B(b)$ و $M(z)$

1. $|z-a|=r$ مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة مركزها $A(a)$ ونصف قطرها r.
2. $|z-a|=|z-b|$ مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

- **الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية:** الصيغة العقدية للعدد العدد العقدي z' صورة z وفق:

1. الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega}(b)$: $z'=z+b$.
2. التحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته k: $z'-\omega=k(z-\omega)$.
3. الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ زاويته θ: $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.
4. التناظري بالنسبة لمحور الفواصل: $z'=\overline{z}$.
5. التناظري بالنسبة لمحور التراتيب: $z'=-\overline{z}$.
6. التناظري بالنسبة لمبدأ الإحداثيات: $z'=-z$.
7. التناظري بالنسبة لنقطة $\Omega(\omega)$: $\omega=\dfrac{z+z'}{2}$.

الرياضيات مع أيهم الشاعر

- **طبيعة مثلث**: لمعرفة طبيعة المثلث ABC نكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري وبالشكل المثلثي (أو الأسي) ونميز الحالات:

1. إذا كان $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين رأسه A.
2. إذا كان $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| \neq 1$ فالمثلث ABC قائم الزاوية في A.
3. إذا كان $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.
4. إذا كان $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ فالمثلث ABC متساوي الساقين رأسه A.

- **إثبات تعامد مستقيمين**: لإثبات تعامد المستقيمين (AB) و (CD) نتبع الخطوات التالية:

1. نكتب العدد العقدي $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ بالشكل المثلثي (أو الأسي).
2. نثبت أن $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

انتهت الوحدة الخامسة

Alshaer Math
الرياضيات مع أيهم الشاعر

الوحدة السادسة : التحليل التوافقي

- **طرق العد:**

1. التباديل: نستخدم التباديل عن اختيار كامل المجموعة n وترتيبها ، ويرمز له: $P_n = n!$.
2. التراتيب: نستخدم التراتيب عن اختيار مجموعة جزئية r من مجموعة كلية n وترتيبها ، ويرمز له: $P_n^r = n(n-1)...(n-r+1)$.
3. التوافيق: نستخدم التوافيق عن اختيار مجموعة جزئية r من مجموعة كلية n دون ترتيب ، ويرمز له $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{P_r}$.
4. المبدأ الأساسي في العد: نستخدم المبدأ الأساسي في العد في التجارب المكررة ، (يمكن استخدام المبدأ الأساسي في بدلاً من التراتيب).

- **متى نستخدم:**

1. التراتيب: السحب بدون إعادة.
2. التوافيق: السحب معاً.
3. المبدأ الأساسي في العد: السحب مع إعادة ، السحب بدون إعادة (يجب الضرب بتعدد التباديل عند الاهتمام بالترتيب).

- **قواعد:**

1. $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ و $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$.
2. $P_n^n = n!$ و $P_n^1 = n$ و $P_n^0 = 1$ و $\binom{n}{n} = 1$ و $\binom{n}{1} = n$ و $\binom{n}{0} = 1$.
3. إذا كان $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ فإن : $p = q$ أو $p + q = n$.

- **منشور نيوتن:** $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$.
- **الحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين $(a+b)^n$:** $T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$.

انتهت الوحدة السادسة

الوحدة السابعة : الاحتمالات

- **قواعد:**

1. احتمال حدث: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.
2. احتمال الاجتماع: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
3. احتمال المتمم: $P(A')=1-P(A)$.
4. احتمال الفرق: $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A\cap B')$.
5. الاحتمال المشروط: (احتمال A بشرط B) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
6. الاستقلال الاحتمالي: نقول عن الحدثين A و B أنهما مستقلان احتمالياً إذا كان $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

ومن المسائل المستقلة احتمالياً:

a. تجارب النجاح والفشل و تجارب الرمي على هدف.

b. تجارب رمي (قطعة نقود ، حجر نرد ...) عدة مرات متتالية و تجارب رمي (قطعتي نقود ، حجري نرد ...) أو أكثر.

c. تجارب السحب مع إعادة.

- **المتحولات العشوائية:**

1. التوقع الرياضي: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_i$.
2. التباين: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.
3. الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

- **الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين:** نقول عن المتحولين X و Y أنهما مستقلين احتمالياً إذا كان:

$$P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)=P(X=x_i).P(Y=y_j)$$

- **تجارب برنولي:** هي كل تجربة تتكرر n مرة ويعطى احتمال حدث في تجربة برنولية بالشكل $P(X=r)=\binom{n}{r}p^n q^{n-r}$ حيث:

n عدد مرات تكرار التجربة و p احتمال الحدث المطلوب و $q=1-p$ و r عدد مرات تكرار الحدث.

- **التوقع والتباين في تجربة برنولية:** التوقع $E(X)=np$ ، التباين $V(X)=npq$.

انتهت الوحدة السابعة

انتهى عرض سريع لأهم أفكار الجزء الثاني / بالتوفيق لجميع الطلاب / إعداد : أيهم الشاعر