

جمهورية العراق - وزارة التربية
الدور الأول ١٤٣٤هـ - ٢٠١٣م
الوقت : ثلاث ساعات

بسم الله الرحمن الرحيم



اللجنة الدائمة للامتحانات العامة
الدراسة : الإعدادية / العلمي
المادة : الرياضيات

ملاحظة : الإجابة عن خمسة أسئلة فقط (لكل سؤال ٢٠ درجة)

س١ : A- جد قيمة : $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

1) $\int \csc^2 x \cos x \, dx$

2) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} \, dx$: B- جد ما يأتي :

س٢ : A- عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

B- جد نقطة أو أكثر تنتمي للمنحنى $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0, 4)$.

س٣ : A- برهن أن : مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .

B- حل المعادلة التفاضلية : $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

س٤ : أجب عن فرعين فقط :

A- قطع مخروطي بؤرتاه $F_1(4, 0)$ ، $F_2(-4, 0)$ واختلافه المركزي $= 2$ ، جد معادلته .

B- لتكن : $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ ، برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية لكل $a \in R$ ، $x \neq 0$.

C- جد المساحة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات .

س٥ : أجب عن فرعين فقط مما يأتي :

A- إذا كان $Z = -2 + 2i$ عبر عن Z بالصيغة القطبية .

B- عمود طوله $7.2 \, m$ في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله $1.8 \, m$ مبتعداً عن العمود وبسرعة

$30 \, m/min$ ، جد معدل تغير طول ظل الرجل .

C- بيّن أن : $y = a e^{-x}$ هو حل للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$.

س٦ : أجب عن فرعين فقط :

A- إذا علمت أن :

$f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد بصورة تقريبية $f(1.01)$ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

B- جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي .

C- إذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $180 \, cm^2$ ومساحة قاعدته $48 \, cm^2$ ومساحة أحد أوجهه الجانبية $24 \, cm^2$ ، جد حجمه .

س ١ / a

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = (1-i)(1+1)(1-i^2(i)) \\ = 2(1-i)(1+i) = 2(2) = 4$$

$$(1-i)(1+i) = 1+i-i-i^2 = 2$$

س ١ / b / جد قيمة

$$1) \int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$$

بما ان مشتقة المقام موجودة $3x^2 + 4$

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx = \ln|x^3+4x+1| \Big|_0^1 \\ = \ln|1+4+1| - \ln|0+0+1| = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$$

$$2) \int \csc^2 x \cos x dx$$

$$\int \csc^2 x \cos x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cos x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx \\ = \int \cot x \csc x dx = -\csc x + c$$

طريقة أخرى للحل

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int (\sin x)^{-2} \cos x dx = -(\sin x)^{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c = -\csc x + c$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

س ٢ / a

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$h = -3, k = -2 \Rightarrow (h, k) = (-3, -2) \quad \text{المركز}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = \pm 4$$

$$(h, k+c), (h, k-c) \Rightarrow (-3, -2+4), (-3, -2-4)$$

$$\Rightarrow (-3, -2), (-3, -6) \quad \text{البؤرتين}$$

$$v_1(h, k+a), v_2(h, k-a) \Rightarrow v_1(-3, -2+5), v_2(-3, -2-5)$$

$$\Rightarrow v_1(-3, 3), v_2(-3, -7) \quad \text{الرأسان}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} 0.8 < 1$$

س ٢ / b / نفرض النقطة (y,) من نقاط المنحني $y^2 - x^2 = 3$ فتحقق معادلته

$$\Rightarrow x^2 = y^2 - 3 \dots \dots (1)$$

$$\therefore s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \dots \dots (2)$$

الان : نعوض معادلة (1) في معادلة (2) فنحصل على :

$$s = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$s' = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0$$

$$\Rightarrow 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$$

القطع المخروطي هو قطع زائد $\Rightarrow e = 2 > 1$

س ٤ / a

ان معادلة القطع الزائد بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل $F(\pm 4, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

س ٤ / b

$$f(x) = x^2 - \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{-a}{x^2} = 2x + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$\left[2x + \frac{a}{x^2} = 0\right] \times x^2 \Rightarrow 2x^3 + a = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{-a}{2} \dots\dots (1)$$

$$f''(x) = 2 + \frac{-2ax}{x^4} = 2 - \frac{2a}{x^3} \dots\dots (2)$$

الان : نعوض معادلة (1) في معادلة (2) فنحصل على :

$$f''(x) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}} = 2 + 2q\left(\frac{2}{q}\right) = 2 + 4 = 6 > 0$$

المشتقة الثانية اكبر من الصفر فان الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

اذن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

س ٤ / c

$$\Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{either : } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{or : } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$1 \in [0, 2]$$

$$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4} - 1 + 1 \right] - [0] \right| + \left| \left[\frac{16}{4} - 8 + 4 \right] - \left[\frac{1}{4} - 1 + 1 \right] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

$$\text{let } Z = -2 + 2i$$

س٥ / a

$$\|Z\| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\|Z\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نستنتج ان الزاوية θ تقع في الربع الثاني $\Leftarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\arg Z = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = \|Z\|(\cos \theta + i \sin \theta) = 2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

س٥ / b / نفرض في لحظة ما : بُعد الرجل عن العمود $x =$

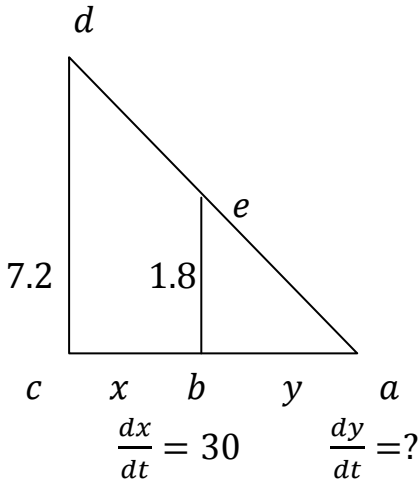
طول ظل الرجل $y =$

من تشابه المثلثين acd, abe

$$\Rightarrow \frac{7.2}{1.8} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow 4y = x + y \Rightarrow 4y - y = x$$

$$\Rightarrow 3y = x \Rightarrow 3 \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3 \frac{dy}{dt} = 30 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 10 \text{ M}$$



$$y' = ae^{-x} \Rightarrow y = -ae^{-x}$$

س٥ / c

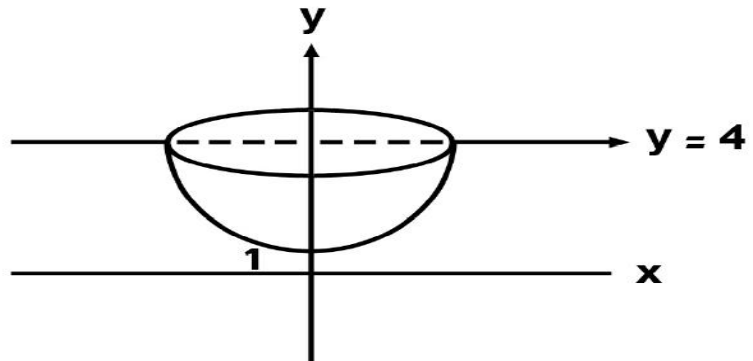
$$LHS = y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = RHS$$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$$

س٦ / b

$$V = \pi \int_1^4 x^2 dy = \pi \int_1^4 (y - 1) dy = \pi \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_1^4$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{9}{4} \right) = \frac{9\pi}{8} \text{ unit}^3$$



س٦ / c /

المعطيات/ متوازي مستطيلات مساحته الكلية = 180 cm^2 ، مساحه قاعدته = 48 cm^2
 مساحه احد اوجهه = 24 cm^2

المطلوب / إيجاد حجمه

البرهان / نفرض ابعاده x, y, z

مساحه الوجهين المتقابلين

$$180 - (2(48) + 2(24)) = (BC'), (AD')$$

$$180 - (96 + 48) = 180 - 144 = 36$$

$$\frac{36}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

∴ مساحه الوجه (BC') هي

$$\therefore xy = 48 \dots \dots \dots (1)$$

$$yz = 24 \dots \dots \dots (2)$$

$$xz = 18 \dots \dots \dots (3)$$

$$x^2 \cdot z^2 = 48(24)(18)$$

$$(xyz)^2 = 4(12)(4)(6)(3)(6)$$

$$xyz = 144 \Rightarrow V = 144 \text{ cm}^3$$

وبضرب المعادلات الثلاث ←

