

1) I/A/ Dans le vide $H = E_0 + A \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e$

a) on a: $\vec{S}_\mu = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_\mu$ } $\vec{S} = \vec{S}_\mu + \vec{S}_e \Rightarrow S^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\vec{\sigma}_\mu + \vec{\sigma}_e)^2$
 $\vec{S}_e = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_e$ } $\Rightarrow S^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_\mu^2 + \sigma_e^2) + \frac{\hbar^2}{2} \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e$

or: $\sigma_\mu^2 = \sigma_e^2 = 3.11 \rightarrow S^2 = \frac{3}{2} \hbar^2.11 + \frac{\hbar^2}{2} \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e$

$\Rightarrow \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e = \frac{2}{\hbar^2} S^2 - 3.11$ soit: $H = E_0 + A \left(\frac{2}{\hbar^2} S^2 - 3.11 \right)$ (1)

b) on a: $S^2 |\Delta, m\rangle = \hbar^2 \Delta(\Delta+1) |\Delta, m\rangle$

$\Rightarrow H |\Delta, m\rangle = \{ E_0 + A [2\Delta(\Delta+1) - 3] \} |\Delta, m\rangle = E |\Delta, m\rangle$ (0,5)

donc $|\Delta, m\rangle$ sont kets propres de H associés à la up E.

$A_\mu = A_e = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta = 1 \rightarrow m = 1, 0, -1$ } (0,5)
 $= 0 \rightarrow m = 0$

E ne dépend que de Δ et on aura: 2 valeurs de E: E_1 et E_0 .

pour $\Delta = 1 \rightarrow E_1 = E_0 + A$ associée aux kets $|1, 1\rangle, |1, 0\rangle$ et $|1, -1\rangle$

pour $\Delta = 0 \rightarrow E_0 = E_0 - 3A$ associée au ket $|0, 0\rangle$

$E_0 + A$ est 3 fois dégénérée (niveau triplet)

$E - 3A$ est simple (niveau singulet)

(0,25x4)

2) $A_\mu = \frac{1}{2} \rightarrow m_\mu = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow |\Delta_\mu, m_\mu\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle; |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ noté $|+\rangle, |-\rangle$

a) $A_e = \frac{1}{2} \rightarrow m_e = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow |\Delta_e, m_e\rangle =$ noté aussi $|+\rangle, |-\rangle$

les éléments de la base sont donc: $\{ |\Delta_\mu, m_\mu\rangle \} = \{ |+, +\rangle; |+, -\rangle; |-, +\rangle; |-, -\rangle \}$

En utilisant la table, on aura:

$|+, +\rangle = |1, 1\rangle$; $|-, -\rangle = |1, -1\rangle$

$|+, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle)$ et $|-, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle)$

(0,5x4)
= 2

on accepte: $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |+\rangle$ aussi
 $= \alpha |++\rangle + \beta |+-\rangle$
 $= \alpha |11\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |00\rangle)$ [2]

b) μ^+ dans $|+\rangle$ et e^- dans $|\phi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle$

$$|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |\phi\rangle = \alpha |++\rangle + \beta |+-\rangle \text{ avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

or on a: $|+,+\rangle = |1,1\rangle$ et $|+,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + |0,0\rangle)$

et donc: $|\psi\rangle = \alpha |1,1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + |0,0\rangle)$ ← 0,5

$|\psi\rangle$ étant normé à l'unité $\Rightarrow E = \langle \psi | H | \psi \rangle = \langle H \rangle$

$$\Rightarrow E = |\alpha|^2 \langle 1,1 | H | 1,1 \rangle + \frac{|\beta|^2}{2} \langle 1,0 | H | 1,0 \rangle + \frac{|\beta|^2}{2} \langle 0,0 | H | 0,0 \rangle$$

sachant que $\langle 1,1 | H | 1,1 \rangle = \langle 1,0 | H | 1,0 \rangle = E_T$ et $\langle 0,0 | H | 0,0 \rangle = E_S$

$$\Rightarrow E = E_T (|\alpha|^2 + \frac{|\beta|^2}{2}) + E_S \frac{|\beta|^2}{2} \text{ avec } E_T = E_0 + A \text{ et } E_S = E_0 - 3A$$

soit $E = E_0 + A (|\alpha|^2 - |\beta|^2)$ ← ①

B) On piège le muonium et $H_p = E_0 + A' \vec{\sigma}_\mu \cdot \vec{\sigma}_e + B \sigma_{\mu z} \sigma_{ez}$

1) a) sachant que $\vec{S} = \vec{\sigma}_\mu + \vec{\sigma}_e \Rightarrow S_z^2 = \sigma_{\mu z}^2 + \sigma_{ez}^2 + 2\sigma_{\mu z} \sigma_{ez}$

avec $\sigma_{\mu z}^2 = \sigma_{ez}^2 = 1 \Rightarrow \sigma_{\mu z} \sigma_{ez} = \frac{S_z^2}{2} - 1$ ← ①

or $S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$ on aura: $H_p = E_0 + A' \left(\frac{2}{\hbar^2} S_z^2 - 3 \cdot 1 \right) + B \left(\frac{2}{\hbar^2} S_z^2 - 1 \right)$

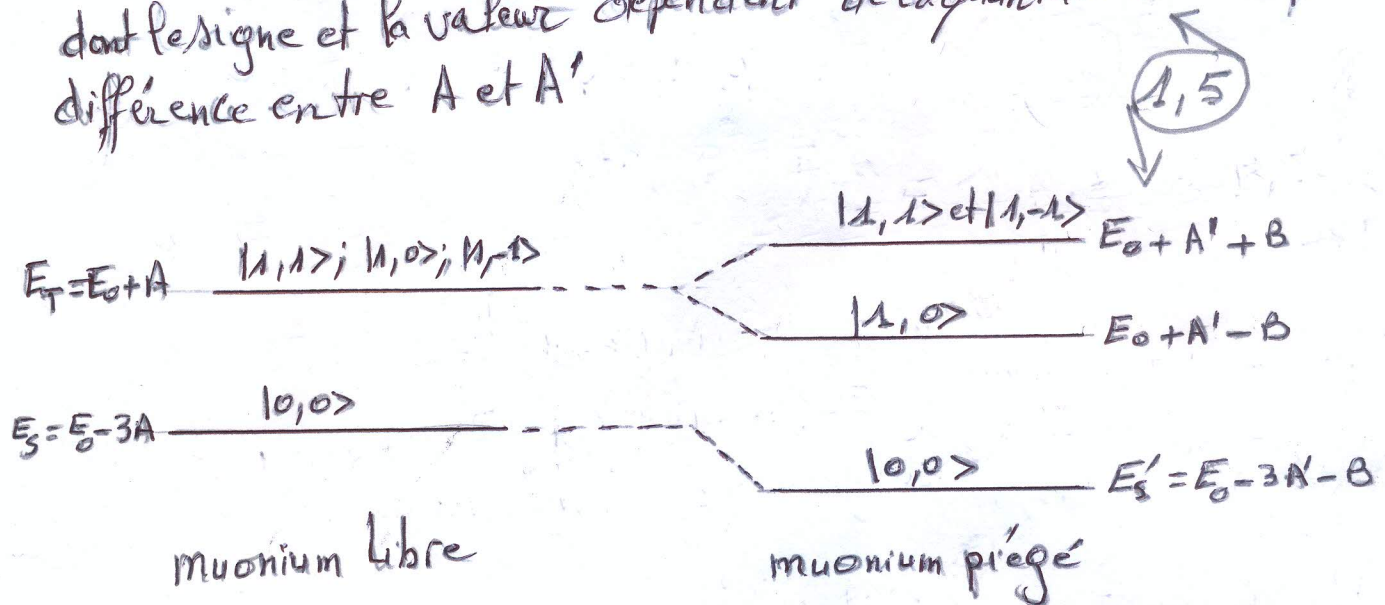
b) $H |A, m\rangle = \{ E_0 + A' [2\Lambda(\Lambda+1) - 3] + B (2m^2 - 1) \} |A, m\rangle$

et les énergies sont donc:

Triplet $\left\{ \begin{array}{l} E_{1,1} = E_0 + A' + B \quad (\Lambda=1, m=1) \\ E_{1,0} = E_0 + A' - B \quad (\Lambda=1, m=0) \\ E_{1,-1} = E_0 + A' + B \quad (\Lambda=1, m=-1) \end{array} \right\}$ on a: $E_{1,1} = E_{1,-1}$ ← 0,25x4

Singulet $\rightarrow E_{0,0} = E_0 - 3A' - B \quad (\Lambda=0, m=0)$

Le piégeage a donc pour effet de séparer le niveau $|1,0\rangle$ des niveaux $|1,1\rangle$ et $|1,-1\rangle$ qui ont la même énergie \rightarrow il y a donc levée partielle de la dégénérescence de l'état triplet. Pour le niveau de l'état singulet, le piégeage provoque un déplacement dont le signe et la valeur dépendent de la quantité B ainsi que de la différence entre A et A' .



2.) μ^+ dans $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ et e^- dans $|+\rangle$

a) $|\psi_p\rangle = |+\rangle_x \otimes |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,+\rangle + |-,+\rangle)$

$\Rightarrow |\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{2}(|1,0\rangle - |0,0\rangle)$

$|\psi_p\rangle$ étant normé à l'unité $\rightarrow \langle H \rangle_p = \langle \psi_p | H | \psi_p \rangle = E_p$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} E_{1,1} + \frac{1}{4} E_{1,0} + \frac{1}{4} E_{0,0}$

Soit $E_p = E_0$

L'énergie de l'état $|\psi_p\rangle$ est donc indépendante de l'interaction spin-spin

b) si $\alpha = \beta$ on aura: $E = E_0$ et les états $|\psi\rangle$ et $|\psi_p\rangle$ auront donc la même énergie.

II 1) $H_x |m_x\rangle = (m_x + \frac{1}{2}) \hbar \omega |m_x\rangle$ et $H_y |m_y\rangle = (m_y + \frac{1}{2}) \hbar \omega |m_y\rangle$ [4]
 $m_x, m_y = 0, 1, 2, \dots$

0,5 $H_0 |m_x, m_y\rangle = (\tilde{H}_x + \tilde{H}_y) |m_x, m_y\rangle = H_x |m_x\rangle \otimes |m_y\rangle + |m_x\rangle \otimes H_y |m_y\rangle$
 $= (m_x + \frac{1}{2}) \hbar \omega |m_x\rangle \otimes |m_y\rangle + (m_y + \frac{1}{2}) \hbar \omega |m_x\rangle \otimes |m_y\rangle = (m_x + m_y + 1) \hbar \omega |m_x, m_y\rangle$

0,5 $\Rightarrow E_{m_x m_y}^0 = (m + 1) \hbar \omega$ avec $m = m_x + m_y = 0, 1, 2, \dots$

2) $b/W = \lambda XY$ avec $E_{m_x m_y}^0 = 2 \hbar \omega = \begin{cases} E_{0,1}^0 : m_x=0, m_y=1 \rightarrow |0,1\rangle \\ E_{1,0}^0 : m_x=1, m_y=0 \rightarrow |1,0\rangle \end{cases}$ 0,5

Le niveau $2 \hbar \omega$ est 2 fois dégénéré \Rightarrow on diagonalise W dans le sous-espace engendré par les kets $|1,0\rangle$ et $|0,1\rangle$. La matrice (W) s'écrit alors:

$(W) = \lambda \begin{pmatrix} \langle 1,0 | \tilde{X} \tilde{Y} | 1,0 \rangle & \langle 1,0 | \tilde{X} \tilde{Y} | 0,1 \rangle \\ \langle 0,1 | \tilde{X} \tilde{Y} | 1,0 \rangle & \langle 0,1 | \tilde{X} \tilde{Y} | 0,1 \rangle \end{pmatrix}$ 0,5

or $\tilde{X} \tilde{Y} |1,0\rangle = X |1\rangle \otimes Y |0\rangle = \alpha^2 (a_x + a_x^\dagger) |1\rangle \otimes (a_y + a_y^\dagger) |0\rangle$
 $= \alpha^2 (|0\rangle + \sqrt{2} |2\rangle) \otimes |1\rangle = \alpha^2 (|0,1\rangle + \sqrt{2} |2,1\rangle)$

$\Rightarrow \langle 1,0 | \tilde{X} \tilde{Y} | 1,0 \rangle = 0$ et de même $\langle 0,1 | XY | 0,1 \rangle = 0$

alors que: $\langle 0,1 | \tilde{X} \tilde{Y} | 1,0 \rangle = \alpha^2$ et $\langle 1,0 | \tilde{X} \tilde{Y} | 0,1 \rangle = \alpha^2$ 1

$\Rightarrow (W) = \lambda \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1

Les vp de W sont donc $+\lambda \alpha^2$ et $-\lambda \alpha^2$ associées respectivement aux v_p normés: $|\varphi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + |0,1\rangle)$ et $|\varphi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle - |0,1\rangle)$

$2 \hbar \omega + \lambda \alpha^2 = E_+ \rightarrow |\varphi_+\rangle$

$2 \hbar \omega - \lambda \alpha^2 = E_- \rightarrow |\varphi_-\rangle$

L'effet de W est donc de lever complètement la dégénérescence du niveau $2 \hbar \omega$.

Exercice II

Question 2) a)

$E_0 = \hbar \omega = E_{00}$ est associé au ket $|0,0\rangle$ et est un niveau simple

⇒ Au 1^{er} ordre, la correction à l'énergie = valeur moyenne de W dans $|0,0\rangle$

Soit $\Delta E_1 = \langle 0,0 | W | 0,0 \rangle = \lambda \langle 0,0 | \tilde{X} \tilde{Y} | 0,0 \rangle \leftarrow (0,5)$

avec $\tilde{X} \tilde{Y} | 0,0 \rangle = \alpha^2 (a_x + a_x^\dagger) | 0 \rangle \otimes (a_y + a_y^\dagger) | 0 \rangle$

or $a_\mu | 0 \rangle = 0$ et $a_\mu^\dagger | 0 \rangle = | 1 \rangle \quad \mu = x, y$

⇒ $\tilde{X} \tilde{Y} | 0,0 \rangle = \alpha^2 | 1,1 \rangle \leftarrow (0,5)$

et par conséquent $\Delta E_1 = \lambda \alpha^2 \langle 0,0 | 1,1 \rangle = 0 \leftarrow (0,5)$

⇒ Pas d'effet de la perturbation sur le niveau $\hbar \omega$ (état fondamental)

I / Question de Cours (Facultative) - 2pts.

(0,25) L'expérience de S.G. permet la mise en évidence du moment cinétique intrinsèque d'une particule.

• L'expérience est réalisée avec un jet d'atomes d'argent ($Z=47$ et $647^{\text{ème}}$ e- et célibataire sur la couche périphérique). Elle consiste à soumettre le jet d'atomes à un (0,5) champ magnétique \vec{B} inhomogène afin de disposer d'un gradient de champ et la force qui en dérive permet une déviation du faisceau.

• Le résultat obtenu est l'observation de deux tâches symétriques et de même (0,25) intensité.

• Interprétation : la particule ($647^{\text{ème}}$ e-) est dotée d'un moment magnétique $\vec{\mu}$ proportionnel au moment cinétique \vec{J} : $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$ et de composante $\mu_z = \gamma J_z$

(1) Si l'on considère que \vec{J} est moment orbital \vec{L} cela veut dire que l'on aurait $2l+1$ valeurs c-à-d $2l+1$ tâches et comme l est entier cela veut dire que l'on aurait un nombre impair de tâches, ce qui est en contradiction avec l'expérience.

Pour contre, si on considère \vec{J} tel que $j = 1/2$, on aura $2j+1 = 2$ tâches on a donc à faire à un moment cinétique de valeur $j = 1/2$: c'est une caractéristique de l'e- et \vec{J} , noté \vec{S} , est le moment cinétique intrinsèque de l'e- nommé, par abus de langage, spin.

But: 0,25 - Principe: 0,5 - Resultat: 0,25 - Interprétation: 1